John Nash, son Equilibre et ses répercussions sur le marché

Histoire des Mathématiques. A la rencontre d'un illustre mathématicien.

Gabriel Bénédict
3M8 — 2011-2012
Professeur de TM: M. Luc Dessauges

3 novembre 2011

Table des matières

Préambule

Ce travail se veut compréhensible pour tous et tend à simplifier la théorie pour l'approcher le plus possible de ses applications. Le choix des notations fut opéré dans ce sens, et ce grâce à la flexibilité des nomenclatures de la théorie des jeux, domaine mathématique datant d'environ 60 ans. En effet, pour donner un exemple, l'espérance de gain peut se noter entre autres $\{P; \pi; u; E\}$, à ne pas confondre avec les probabilités qui se notent p.

Pour choisir les notations, il a été décidé de se rapprocher le plus possible du français tout en conservant P (pour Payoff, et ici utilisé pour expected payoff), puisqu'il est majoritairement retrouvé sur internet et sur les textes mathématiques. D'autres part, l'astérisque désignera le ou les Equilibres de Nash purs ou l'Equilibre mixte.

Image de titre : de gauche à droite : Robert Aumann et John Nash. (`http://www.istiseo.org/eng/convegni_2008_conference03.asp`)

Première partie

Introduction

"La théorie des jeux" est une expression connue dans beaucoup de milieux mais peu savent de quoi il s'agit. On peut la confondre avec la théorie des probabilités, parce que celle-ci est également utilisée dans la théorie des jeux. Lorsque l'on interroge une personne qui dit connaître la théorie des jeux, la réponse est souvent : "cela aide pour jouer au poker". Dans un sens, cette théorie mathématique et microéconomique consiste bien en l'analyse de la chance, des comportements et des espérances de chaque joueur, comme au poker. Et c'est le poker qui a effectivement été un des premiers jeux étudiés par Von Neumann, considéré comme le pionnier de la théorie des jeux.

En me lançant dans ce sujet, je n'avais aucune connaissance au préalable mais j'aime l'inconnu et la découverte de nouveaux concepts. En même temps, je m'intéresse particulièrement aux marchés boursiers et à la situation financière et économique actuelle. Or, j'ai choisi, lors de mon entrée au Gymnase, l'option Mathématiques et Physique et j'ai été fasciné par ce sujet parce qu'il s'appuie sur des théories mathématiques afin d'être appliqué à l'économie. De plus, cela m'a permis de me familiariser avec le langage $\TeX$.

La théorie des jeux m'a beaucoup plu car elle permet de modéliser tous les cas imaginables de négociations, que ce soit dans le cadre de rapports humains et même de rapports de force dans la nature. Intrigué par la diversité et la profondeur du sujet, je voulais savoir à quoi ressemblaient les mathématiques récentes, inexplorées pour moi jusque-là.

Cependant, la théorie des jeux est un vaste domaine ; il fallait choisir un mathématicien en particulier. L'équilibre de Nash était le sujet le plus approprié, puisqu'abordable et applicable à notre époque. Mais qui dit équilibre de Nash, dit aussi Raffinements de l'Equilibre de Nash, ces derniers étant beaucoup plus complexes et récents. Je savais donc que je pourrais décrire les bases de la théorie mais pas tous ses aboutissements et je me suis donc focalisé ici sur les bases, sans oublier les répercussions sur le monde économique, domaine qui me tient à coeur.

J'ai eu la chance de rencontrer le professeur Aumann, Prix Nobel en économie, qui a développé le côté économique, de la même façon que mes lectures m'ont livré le côté mathématique de cette théorie.

Enfin, j'ai découvert le personnage de John Nash, qui a eu une vie intéressante et particulière, de par sa maladie, la schizophrénie. Il était donc possible de s'intéresser non seulement à la théorie, à son application pratique, mais également à la fascinante et émouvante personnalité de ce grand théoricien.

Dans les pages qui vont suivre, je vais donc essayer de familiariser le lecteur avec la théorie des jeux, pour la lui présenter vulgarisée au possible. On pourra alors parler d'Equilibre de Nash et de ses applications à l'économie, avant de tirer une conclusion générale.

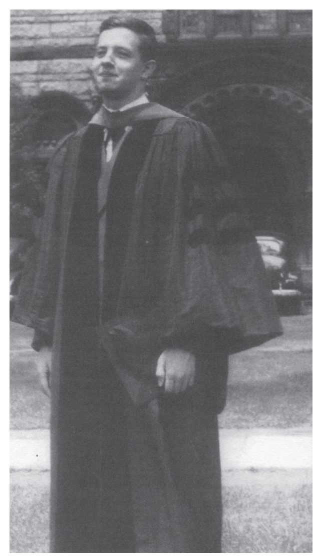
Deuxième partie

La vie de John Nash

Les quelques éléments de la vie de John Nahsh présentés ci-dessous sont tirés du livre "A Beautiful Mind"[20].
John Forbes Nash, un ingénieur né en 1892, se marie le 6 septembre 1924 avec Margaret Virginia Martin, une maîtresse d'école. Le 13 juin 1928 naît leur premier enfant : John Forbes Nash. En effet, le père du futur mathématicien lui donne son nom. Deux ans plus tard, Martha, sa soeur, naît. Le petit John joue seul avec des avions et des voitures miniatures, alors que sa soeur en grandissant s'amusera avec ses cousins. Plus tard, le jeune garçon s'intéresse plutôt aux livres, ce qui va réjouir ses parents : sa mère lui donne des cours à la maison en plus de l'école où il réussit très bien ; son père l'assied devant des livres de sciences qui le pousseront à réaliser des expériences. Il s'intéresse particulièrement à une encyclopédie que ses parents lui offrent. Il développe un tempérament solitaire.

C'est plus son caractère solitaire et particulier que sa réussite scolaire, que les professeurs remarquent. Sa vie sociale est entachée par son comportement bizarre et ses parents n'hésitent pas à lui proposer des activités sportives et des rencontres, mais il porte tout son intérêt sur ses expériences de chimie. C'est à l'âge de 12 ans qu'il lit son premier livre sur les mathématiques, parallèlement à l'école qui l'intéresse nettement moins.

Ensuite, au Bluefield College, John reste à l'écart des étudiants et prend finalement du plaisir à assister aux cours scientifiques, comme la chimie qu'il expérimente toujours en solitaire. Il devient violent. Il tue des animaux. Ses explosifs tuent accidentellement un de ses camarades. Entre 1941 et 1945, il effectue son Bachelor à Bluefield et décide de se consacrer à l'étude de la chimie au Carnegie Institute of Technology (actuellement Carnegie Melon), où il se découvre un faible pour les mathématiques. Il change de direction et se voit encouragé par des professeurs de cette branche qui décèlent en lui un véritable talent. John souffre toujours de solitude et agit de plus en plus bizarrement envers les autres élèves. Il est sujet à de nombreuses moqueries mais il tient tête à ses agresseurs grâce à son physique.



"The Essential, John Nash"[16]

En 1948, il termine ses études à Carnegie Institute of Technology et se voit accepté dans les plus grandes universités du moment : Harvard, Princeton, Chicago et Michigan. Harvard l'intéresse particulièrement, puisqu'elle est réputée pour être la meilleure. Il rentre cependant à Princeton qui lui offre le statut d'étudiant le plus prestigieux de l'école. Il y étudie plusieurs branches des mathématiques et en particulier la théorie des jeux. Il publie *The bargaining Problem* et sa thèse *non-cooperative games*, reflétant son intérêt pour la matière. Avec cet énorme bagage en main, durant l'été 1950, il se voit enrôlé dans la RAND : il s'agit d'une institution créée et subventionnée par le gouvernement américain. Le but de la RAND est d'aider le Sénat dans ses décisions grâce à des analyses poussées de la situation politique de l'époque par des scientifiques de renommée. On y applique la théorie des jeux aux stratégies militaires de la Guerre Froide. Bien que le sujet soit très actuel, Nash revient de ce séjour sans avoir obtenu un réel succès. Heureusement, il s'était préparé à cette éventualité et avait travaillé dans plusieurs domaines mathématiques pointus, qui débouchent sur *Real Algebraic Manifolds* dans the Annals of Mathematics.

Malgré sa réussite avérée dans sa branche, certains professeurs de la faculté de mathématiques de Princeton ne sont pas très heureux de voir John Nash devenir professeur dans cette institution, étant donné son comportement schizophrène alors décrit comme agressif. Mais grâce à ses compétences, il devient professeur à l'Institut de Technologie de Massachusetts, où les élèves auront de mauvaises relations avec lui. Pendant ce temps-là, il continue ses recherches poussées en mathématiques : il écrit en 1954 C^1 *isometric imbeddings*, *The imbedding problem for Riemannian manifolds* publié en 1956 et *Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations* en 1958. Ce dernier travail sera suivi d'une grande déception. Après l'avoir terminé, il découvre qu'un autre mathématicien, E. De Giorgi, avait déjà prouvé des résultats similaires aux siens avec des méthodes différentes. Ce travail est aussi le dernier qu'il effectue avant de sombrer dans la maladie.

Sur le plan sentimental, comme sur le plan social, la situation s'aggrave. Des collègues relèvent un penchant homosexuel chez Nash. Durant la même période, il tombe amoureux de Eleanor Stier, une femme timide et peu sûre d'elle-même, avec laquelle il a un fils : John David Stier. Elle veut absolument se marier, mais John Nash refuse. En parallèle, il a deux relations amoureuses avec des élèves : il fréquente régulièrement son élève Alicia Larde à partir de 1955 et parallèlement Jack Bricker, un étudiant. Les parents de Nash ne savent même pas qu'il est en relation avec Eleanore et qu'il a un fils.

Puis, Eleanor découvre que John lui est infidèle et le quitte. Ses parents découvrent leur petit-fils et John Nash se marie avec Alicia en 1957.

Entre 1958 et 1959, son état mental s'aggrave, alors qu'Alicia est enceinte : il s'habille en bébé pour le nouvel-an et agit de façon étrange. Il revient ensuite à l'Université et commence à donner des cours sur la théorie des jeux. A son premier cours, il dit : "The question occurs to me. Why are you here ?". En français, "Une question me vient à l'esprit. Pourquoi êtes-vous là ?". Il demande ensuite à un élève de le remplacer avant de disparaître durant deux semaines et de réapparaître avec un New York Times à la main, affirmant qu'il contient des messages encryptés uniquement destinés à sa personne. Ses étudiants pensent à une blague pour introduire le sujet, tandis que quelques professeurs s'inquiètent de son comportement.

Alicia fait hospitaliser son mari quelques mois plus tard contre sa volonté. A sa sortie, il crie au complot et quitte MIT et les Etats Unis ; une fois en Europe, il demande à renoncer à sa nationalité américaine. Sa femme le suit et le fait rapatrier aux Etats Unis. Ils s'installent à Princeton et elle obtient un travail. Nash déambule dans le campus de Princeton en parlant de lui à la troisième personne. Il téléphone à des anciens collègues avec qui il se perd en monologues. Alicia est atterrée par la situation mentale de son mari.

Finalement, sa famille et sa femme décident de l'interner au Trenton State Hospital dans le New Jersey en 1961, où on lui administre des traitements expérimentaux. Un an plus tard, Alicia divorce et Nash entre dans une phase de schizophrénie avancée, de laquelle il sort seulement au début des années nonante.

En 1994, il reçoit le prix Nobel en Sciences Economiques "for pioneering analysis of equilibria in the theory of non-cooperative games". En français, "pour des analyses pionnières de l'équilibre dans la théorie des jeux non-coopératifs". En 1999, il reçoit encore le "Leroy P Steele Prize" de l'American Mathematical Society.

Aujourd'hui, John Nash mène des recherches sur la théorie des jeux, donne des conférences et est professeur émérite à Princeton. Sur son site internet, il écrit qu'il fait des recherches impliquant "la logique, la théorie des jeux, la cosmologie et la gravitation".

"The Essential, John Nash"[16]

Troisième partie

La théorie des jeux

La théorie des jeux est une théorie mathématique trouvant ses origines dans des légendes africaines et celtiques qui mettent en scène des dilemmes pour les uns ou illustrent des jeux d'échecs pour les autres. Mais ces contes antiques n'ont pas apporté de réel intérêt pour les jeux en tant que tels, qui restent traditionnellement une distraction ou une façon de mettre son cerveau en éveil tout au plus. Il fallut attendre le début du XX^e siècle pour que des mathématiciens abordent ce sujet et développent une théorie qui puisse intéresser des économistes et des biologistes. Les études ne seraient probablement pas allé aussi loin sans le climat de guerre presse-bouton qui poussa les américains à développer de nouvelles théories de combat contre l'ennemi soviétique, grâce à la RAND. Et c'est sûrement parce que certaines de ces recherches sont restées secrètes un certain temps, qu'un intérêt s'est développé et que le manque de résultats tangibles fut étouffé. Il s'agit donc d'une discipline récente, qui doit faire ses preuves dans la pratique.

Les éléments d'histoires sont majoritairement extraits du livre "Le dilemme du prisonnier" [23].

1 Contes et Légendes

La première étude d'une situation relevant de la théorie des jeux se trouve dans le Talmud, la compilation des anciennes lois juives, écrit entre l'an 0 et l'an 500. C'est l'économiste Robert Aumann qui le désignera en 1985 comme étant le prédécesseur de la théorie des jeux. S'y trouve, par exemple dans le traité Bavametsia, au chapitre 1, dans le développement talmudique de la première michna, l'histoire de David et Daniel : deux plaignant arrivent à la cours suprême alors en place dans Jerusalem : le Bet Din. Ils y pénètrent, tout deux accrochés à un tallit (châle de prière en forme de rectangle), et revendiquent la propriété de l'objet qu'ils ont retrouvé dans la rue. La situation est telle que chacun tient le tallit jusqu'à une certaine distance du milieu de l'habit, distance que l'on établit à 1/10 de la largeur totale du tallit, pour la modélisation du jeu. Alors certains commentateurs écrivent qu'il faut tout simplement partager la valeur de l'objet en deux, puisque personne ne sait qui a attrapé le tallit en premier. Mais certains commentateurs proposent une solution bien plus intéressante : les juges devraient écouter les revendications des plaignants. Si les deux réclament tout l'objet, parce qu'ils sont chacun persuadés de l'avoir attrapé en premier, alors, selon ces commentateurs, seule la partie qu'ils tiennent en main devant les juges leur appartient ; quant au reste de la valeur de l'objet, il est attribué au tribunal lui-même qui a besoin de cet argent dans le cas où on retrouverait le propriétaire de l'objet, par exemple. Mais si David revendique tout l'objet et Daniel revendique la moitié, on devrait donner la moitié à David ! parce que celui qui atteste être propriétaire de la moitié reconnaît que l'autre moitié ne lui appartient pas ; cette moitié revient à l'autre plaignant. Quant au plaignant qui voulait le tout de l'objet, il n'aura que la partie qu'il tient, puisque l'on ne peut être sûr que ce qu'il dit est vrai. Enfin, via le même raisonnement, si tout deux reconnaissent être propriétaire d'uniquement la moitié, alors les deux bénéficieront de ce que l'autre lui reconnaît : la moitié !
Voici le résultat sous forme de tableau :

		Daniel	
		tout	moitié
David	tout	(1,1)	(5,1)
	moitié	(1,5)	(5,5)

Sur ce tableau, les gains sont reportés de telle sorte que le chiffre 10 représenterait l'objet en entier. Le commentateur argumente qu'avec sa méthode de partage, si tous deux demandent à recevoir tout l'objet, on leur donnera juste la part qu'ils tiennent, puisque c'est la seule partie dont on peut clairement déterminer l'appartenance. Finalement, David reçoit ce que Daniel veut bien lui laisser et cela vaut pour les deux joueurs.

Plus tard, on déchiffrera certaines histoires de tribus africaines qui posent la question de la façon d'agir dans des cas assez loufoques et qui portent à réflexion : un homme va traverser une rivière avec sa mère et sa femme. En face de lui apparaît une girafe, sur laquelle il pointe son fusil. Alors la girafe lui dit :"Si tu tires, ta mère mourra et si tu ne tires pas, ta femme mourra." Que doit faire l'homme ? Selon la tradition africaine, la girafe dit toujours la vérité. Donc l'homme se retrouve devant un dilemme.[23]

2 Le Kriegspiel

C'est au dix-huitième siècle qu'apparaît une nouvelle facette des jeux : la simulation guerrière. La Prusse, alors à son apogée territoriale et en guerre contre la France et d'autres pays, cherche à étendre sa supériorité plus loin en Europe. Les généraux trouvent alors le moyen de modéliser leurs batailles en disposant des soldats d'étain sur d'immenses plateaux représentant des champs de bataille. On y place des cases, on crée des règles et on commence à jouer sur de vraies cartes militaires. Le concept est simple à la base : on joue par tours, les joueurs n'ont droit qu'à un certain nombre de mouvements par tour et les soldats ont différents grades qui les rendent plus forts ou moins forts que leurs adversaires.

Plus tard, la Prusse vainc les Autrichiens et les Français successivement en 1866 et 1870. Toute l'Europe attribue ces victoires au Kriegspiel, alors largement pratiqué par le Kaiser lui-même. Le jeu atteint le nouveau monde et l'Asie. On le dit utilisé par le Japon. Cependant, dès la cuisante défaite allemande de 14-18, l'enthousiasme retombe et seuls quelques officiers allemands y jouent encore. Durant cette période, de grands mathématiciens de la théorie des jeux se penchent sur le sujet ; John Von Neumann et John Nash s'y essayèrent en leur temps.

3 Les pionniers de la théorie

A partir de ce moment, les premières analyses mathématiques d'un jeu commencèrent. Le poker attire alors par la complexité de son étude, requérant l'analyse des probabilités. C'est une branche des mathématiques très liée à la théorie des jeux ; elle sera mentionnée plus tard.

Les spécialistes de la théorie des jeux s'accordent à peu près tous sur le fait que les études du jeu d'échecs de l'Allemand Ernst Zermelo en 1913 et de la généralisation de son théorème par Kalmár et König forment le premier théorème de la théorie des jeux.

Une dizaine d'années plus tard, le mathématicien français Emile Borel est le premier à étudier le poker de manière méthodique. Il aborde le "bluff" et se demande si, dans un jeu quelconque, il existe une stratégie optimale : une manière de gagner à coup sûr, quelles que soient les actions du joueur adverse. Et si elle existe, encore faut-il pouvoir la déterminer.

Ce problème posé, John Von Neumann, un mathématicien américain, se garde bien de faire référence à la théorie de Borel, lorsqu'il publie ses premiers écrits sur la théorie des jeux et son application à l'économie. Il se considère comme le pionnier de la discipline. Un article de Von Neumann, *"Zur Theorie der Gesellschaftspiele"*, paraît en 1928. Les spécialistes de la discipline s'accordent à dire que cette étude pose les bases de la réflexion sur les jeux. C'est principalement la théorie du **minimax** qui lui donne une telle crédibilité. Se basant sur cette théorie, Von Neumann publie un livre, cette fois avec l'aide de Thomas Morgenstern, un économiste hongrois. Leur oeuvre *"Theory of Games and Economic Behavior"* se consacre donc à l'analyse de systèmes économiques. Le livre a très peu de succès et reste peu convaincant pour une majorité d'économistes qui y voient des représentations trop sommaires de situations économiques complexes. En effet, les deux professeurs présentent une séduisante science exacte de l'économie, qui est toutefois entachée par l'incapacité de résoudre les dilemmes posés compte tenu des connaissances du moment.

4 La guerre froide

La RAND

Mais l'idée de la théorie des jeux s'impose : on peut imaginer définir les gagnants d'un conflit, définir le gain de chaque protagoniste dans le conflit avant que le conflit n'ait eu lieu. Quelques universitaires s'y intéressent aux Etats-Unis. Mais les calculs restent flous et l'on peine à mathématiser tous les facteurs entrant en compte dans un jeu. La discipline perd un peu d'intérêt jusqu'à la fin de la deuxième guerre mondiale.

Dès ce moment commence la guerre froide qui inquiète toute la planète et en particulier les gouvernements russe et américain. On se demande qui va tirer le premier la fameuse bombe atomique que chaque pays prétend posséder en quantité. Sous l'empire d'une véritable peur dissimulée et face à l'éventualité d'une importante bavure, les USA créent une institution de recherche stratégique. Ils la nomment la RAND : Research and Development, créée en 1945. Son but : "La RAND Corporation est une institution non-lucrative qui aide à améliorer la politique et la prise de décisions à travers la recherche et l'analyse", comme il est écrit sur son site internet. Ils y réunissent les plus grands scientifiques du moment dans le but d'inventer des armes et en particulier d'étudier la théorie des jeux appliqués aux manoeuvres militaires. L'institution, dont l'existence est connue du peuple américain, dissimule une partie de ses études confidentielles. Parmi les chercheurs renommés qui y participent, se trouvent John Von Neumann, John Forbes Nash en tant que consultant, Merrill Flood, Melvin Dresher, Kenneth Arrow, Georges Dantzig, Martin Schubik ou John Williams, le premier directeur. Les deux premiers joueront un rôle crucial dans le développement de la théorie des jeux.

Quand la RAND ouvre ses portes, ses premiers travaux sont clairement dirigés vers un projet de largage de bombes nucléaires sur des cibles clé en Russie. L'institut travaille d'abord au service de l'Armée de l'Air américaine, puis aidera d'autres sections militaires durant toute la guerre froide et jusqu'à récemment. Aujourd'hui, la RAND effectue toujours quelques recherches secrètes mais a perdu de l'intérêt, ne se maintenant que sur sa réputation acquise pendant la guerre froide.

Pour en revenir aux débuts, Von Neumann rejoint la société en 1948 et Nash deux ans plus tard. Les deux travailleront en parallèle sur des recherches universitaires, puisque la rémunération de la RAND pour ses chercheurs n'est en fait que symbolique. Nash publie quatre de ses plus importants articles : *Equilibrium Points in N-Person Games* (1950), *Non-cooperative Games* (1951), *The Bargaining Problem* (1950) et *Two-Person Cooperative Games* (1953). En parallèle, la plus grande découverte à la RAND dans ce domaine est réalisée par Merrill Flood et Melvin Dresher. Ce sont eux qui, en 1950, inventent le dilemme du prisonnier sur lequel beaucoup de mathématiciens se penchèrent. Le dilemme (par définition un problème dont la solution n'est pas connue) met en doute l'Equilibre de Nash et conduit à des conclusions éthiques qui concernent l'économie, la biologie ou la sociologie.

Le dilemme du prisonnier

Si le dilemme du prisonnier a pris une telle importance, c'est aussi que le problème examiné correspond exactement à la situation de la guerre presse-boutons, alors à ses débuts. Les Etats-Unis ont les moyens d'attaquer la Russie instantanément ; les Russes aussi. Mais si les deux attendent et ne font rien, les deux pays sont gagnants puisqu'ils évitent des pertes considérables. Mais voilà, la menace du pays d'en face existe bel et bien : si l'ennemi attaque d'abord, il faudra assumer les dégâts et peut-être qu'une riposte ne sera même plus envisageable. D'où l'intérêt d'attaquer d'abord le pays d'en face pour minimiser les dégâts, tout en s'attendant à une riposte sûrement moindre. Si, suivant cette logique, les deux pays décidaient d'attaquer et, si par hasard, ils le faisaient en même temps, les deux pays seraient perdants. Ce qui se passe en réalité dans la guerre froide est que les deux pays veulent éviter d'être confrontés à ce dilemme ; ils s'arrangent donc pour créer des armes plus puissantes que l'adversaire pour augmenter la menace jusqu'à ce que l'opposant capitule de peur de perdre. Seulement l'information sur ces armes est très floue des deux côtés. D'abord, le nombre de bombes nucléaires à disposition de chacun est totalement fluctuant selon qui l'annonce à l'intérieur même d'un des deux pays. Ensuite est venue la bombe H, succédant à la bombe A. Très vite après l'annonce des Etats-Unis de la détention de la nouvelle technologie, les Russes affirment avoir la capacité d'en construire une également. Cependant l'information n'est pas sûre et les Etats-Unis préfèrent garder la pression sur la Russie pour le moment.

Il paraît nécessaire de mentionner quelques dates :
- 1945 : Les Etats-Unis affirment avoir la bombe A
- 1949 : La Russie affirme avoir la bombe A
- 1952 : Les Etats-Unis ont la bombe H, 100 fois plus puissante que la première
- 1953 : Les Russes ont la bombe H

Ainsi, pendant 44 ans, les deux pays n'ont cessé de produire de nouvelles bombes plus puissantes, moins coûteuses ou plus nombreuses à titre de simple menace. Si par malheur l'un s'était retrouvé en réelle position d'infériorité due à une faille dans le secret de la production de bombes, la guerre aurait sûrement éclaté. Le professeur Aumann dit à ce propos que sans ces bombes, sans la menace, la guerre aurait éclaté. Selon lui, pour chaque pays qui aimerait entretenir la paix avec ses homologues, il faudrait créer des armes et entretenir un discours agressif pour informer les autres pays de la menace ; et ainsi tous les pays devraient observer cette règle pour que la tension engendrée empêche les Etats d'agir militairement, car menacés.

Pour terminer ce chapitre sur la guerre froide, il est important de se rappeler que le modèle du dilemme du prisonnier est une version très simplifiée du conflit et que personne ne savait à ce moment-là comment réagir, et personne ne sait vraiment de nos jours que faire devant ce dilemme. Pouvoir y accéder, permettra au lecteur de se rendre pleinement compte de la singularité du problème dans le chapitre sur l'apport de John Nash dans la théorie des jeux (cinquième partie).

5 Le soufflé retombe : les applications abstraites

Très vite, l'enthousiasme des mathématiciens pour la nouvelle branche de la théorie des jeux s'amoindrit. En 1950, John Nash définit son Equilibre, puis les chercheurs de la RAND commencent à percevoir que la mathématisation d'un conflit social ou politique reste impossible puisque les facteurs à prendre en compte sont innombrables. Ils tentent alors des expériences et utilisent des branches mathématiques diverses pour résoudre ces problèmes. Parfois avec succès, à l'instar de Conway qui associe les jeux aux nombres surréels en 1970.

Pour en revenir à notre sujet, des raffinements de l'Equilibre de Nash se sont développés durant les cinquante dernières années. Et c'est autour de l'Equilibre que s'articulent les études économiques des années septante et huitante. Celles-ci explorent l'équilibre économique comme celui du duopole et l'on trouve Gerard Debreu comme pionnier du domaine. Enfin, dernièrement, les enchères se sont ajoutées aux applications de la théorie des jeux.

Quatrième partie

Explication de la théorie des jeux

6 Le Jeu et sa définition

Ce chapitre se veut un condensé de plusieurs livres sur la théorie des jeux que l'on peut retrouver aux références [12] [18] [8] [19].

La définition d'un jeu est claire en général : il s'agit par exemple d'une activité lucrative limitée par des règles. Plus précisément, chaque jeu comporte des caractéristiques qui le différencient des autres. On peut avoir un nombre de tours différents, un nombre de joueurs minimum ou maximum requis, une part de hasard ou non, un support (un plateau de jeu, des cartes ou même une console de jeux vidéos) ou non, etc. Tout cela constitue les règles du jeu. Dans ce chapitre, il s'agira de nommer les principales caractéristiques d'un jeu :

- **Le nombre de joueurs :** dans la théorie des jeux, les théoriciens font surtout la distinction entre les jeux à un joueur, les jeux à deux joueurs et les jeux à plus de deux joueurs.
  Quand on étudie un jeu à **un joueur**, il est beaucoup plus simple de déterminer qu'il joue contre quelqu'un ; dans ce cas un peu loufoque, il joue contre la *Nature*. C'est-à-dire qu'il joue contre le hasard. Voilà un cas où les probabilités sont utilisées dans la discipline.
  Les jeux à **deux joueurs** seront mis en évidence dans ce travail où les joueurs seront généralement symbolisés par les lettres A et B lors de calculs.
- **Le nombre de tours et le nombre de coups par tour :** la notion de tours ou de coups est simple en soi, c'est leur nombre qui va déterminer la complexité de l'analyse du jeu. La théorie nomme les coups "actions" et chaque tour est un sous-jeu ; et toutes les actions inclues dans tous les sous-jeux forment un jeu. Ces facteurs font partie de ceux que les analystes ont de la peine à transposer à partir d'un problème d'ordre politique ou économique.
- **Les gains :** un gain est une récompense ou un paiement négatif ou positif pouvant prendre toutes les formes et qui se voient quantifiés pour effectuer des calculs. Il existe un cas particulier de jeu : le jeu à somme nulle. C'est-à-dire que ce que l'un gagne, l'autre le perd. En d'autres termes, la somme des gains est égale à zéro (pour un exemple, voir plus loin le jeu des *"Matching coins"*).
  Pour signaler les gains d'un joueur X et d'un joueur Y, on représente leur gains respectifs x et y par le couple (x, y), l'ordre des valeurs indiquant le joueur auquel les gains sont attribués. Bien entendu, le but d'un jeu est de gagner, mais surtout sur le plan psychologique. Cependant, on peut perdre à un jeu mais remporter une satisfaction psychologique. Imaginons un père jouant aux échecs avec son fils qui joue pour la première fois et qui est mauvais perdant. Alors le père va jouer de façon à laisser le fils gagner. Ces gains psychologiques peuvent être quantifiés également.

7 L'analyse du jeu

Dans ce travail, plusieurs jeux seront analysés en commençant par :
- La détermination du type de jeu
- L'analyse du déroulement du jeu
- L'identification de la stratégie optimale
- L'attribution des stratégies optimales (selon l'issue désirée)

7.1 Le type de jeu

Le chapitre précédent traitait des caractéristiques du jeu, qui sont des valeurs concrètes dont l'analyste va s'informer. Or un jeu ne se distingue pas seulement par ces caractéristiques, mais aussi par les possibilités d'interactions entre les joueurs, elles bien abstraites.
Tout d'abord, deux grandes catégories de jeux se présentent : il est facile de séparer les jeux compétitifs (aussi appelés non-coopératifs) des jeux coopératifs. A noter qu'il existe des jeux semi-coopératifs qui impliquent que les joueurs coopèrent temporairement, par exemple sur un accord, un trust.

Un autre facteur important détermine certaines formes de jeux : l'information. On appelle jeu à **information complète**, un jeu où chaque joueur connaît toutes les mouvements qu'il peut effectuer, connaît les possibilités d'action de ses adversaires et les gains en jeu. Par définition, il connaît aussi les motivations psychologiques des joueurs qui déterminent en eux-mêmes les gains. On appelle jeu à **information parfaite** les jeux au tour-à-tour où le joueur sait tout ce qui a été dit plus tôt et de plus, sait tout ce qu'ont fait les autres avant lui. Les échecs, par exemple sont à **information complète et parfaite**. On appelle jeu à **information incomplète ou partielle**, un jeu où un ou plusieurs des critères du jeu à information parfaite n'est pas respecté. Le hasard représenté par l'utilisation de dés, par exemple, peut en être la cause.

Les concepts de connaissance commune et de connaissance mutuelle sont récents et ont été mis en valeur par le professeur R. J. Aumann dans *"Agreeing to Disagree"*(1976). Pour comprendre ces concepts, il est nécessaire de comprendre pourquoi ils ont été introduits dans la théorie. Imaginons une situation où un magasin d'habits veut lancer un parfum, alors que son concurrent l'a déjà fait. Ce magasin sait que le concurrent l'a déjà sorti. Mieux, le magasin sait que le concurrent sait qu'il sait qu'il l'a sorti. Encore mieux, le concurrent sait que le magasin sait que le concurrent sait qu'il sait qu'il l'a sorti etc. Le problème est simple : ce raisonnement peut être poursuivi à l'infini. Les mathématiciens appellent ce phénomène réciproque et infini entre les joueurs "connaissance commune". Pour expliquer le choix de certaines actions des joueurs, on dira que le magasin va lancer son parfum en connaissant les risques en jeu puisqu'il sait que le concurrent a déjà sorti un parfum. Il s'agit cette fois de "connaissance mutuelle" d'ordre 1. Si le magasin sait qu'il sait, il s'agira de "connaissance mutuelle" d'ordre 2. Il est cependant requis de rester dans des nombres finis et proches de 1 afin de réaliser des calculs ou des prévisions viables. Pour ce travail et de façon générale, les jeux seront analysés avec une connaissance mutuelle d'ordre 2.

7.2 Le déroulement du jeu

Nous étudierons deux manières différentes de représenter un jeu afin de le résoudre, mais auparavant il convient d'introduire les trois termes d'action, de probabilité et de stratégie, indispensables à la modélisation mathématique du déroulement du jeu.

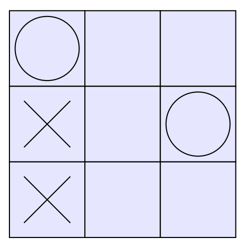
- **L'action**
  Tout jeu fonctionne sur la réaction du joueur face à son adversaire. C'est pourquoi il se déroule

de manière à ce que chaque joueur puisse répondre face aux coups adverses. Cependant, chaque joueur ne peut répondre, c'est-à-dire contribuer à l'avancement du jeu, qu'à certains moments de ce jeu édictés par les règles du jeu. Dans la plupart de ces moments, le joueur a le choix de contribuer à l'avancement du jeu d'une ou plusieurs manières. A chaque fois qu'un joueur contribue à l'avancement du jeu, il fait une action. Elle se note A_i, pour l'action "A" du joueur i. On verra plus loin que plusieurs actions forment une stratégie et la notation d'action sera laissée de côté.

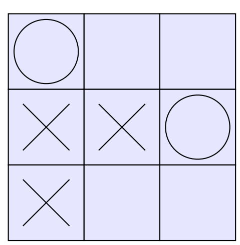
– **Les probabilités**
Il s'agit d'une branche mathématique bien à part qui existe depuis le XVI^e siècle. On parle de probabilités lorsque l'on se demande quels sont les évènements susceptibles de survenir. Par exemple, Paul pense que Pierre a 60 % de chances de passer son examen ; sous-entendu : il a 40 % de chances de ne pas le passer. On dira ici que le cas le plus probable est qu'il passe son examen.

Concrètement, voici un jeu bien connu :

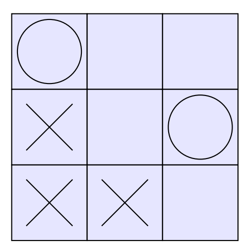
Les joueurs croix et rond jouent au morpion, c'est à croix de jouer :



Il hésite entre deux possibilités :



stratégie s



stratégie t

Le joueur Croix a de la peine à se décider et le joueur Rond peut alors estimer qu'il y a une probabilité de $1/2$ qu'il joue sur la case du milieu et une probabilité de $1/2$ qu'il joue sur la case du bas. On aura alors, $p(s) = 1/2$ et $p(t) = 1/2$, où, rappelons-le, s et t sont deux stratégies différentes. Il est important de savoir que, puisqu'il s'agit d'un rapport, l'addition des probabilités donnera : $p(s \text{ ou } t) = p(s) + p(t) = 1/2 + 1/2 = 1$
Selon le joueur Rond, Croix va donc jouer une fois sur deux au milieu et une fois sur deux en bas.

– **La stratégie(pure)**
Supposons le jeu fini, c'est-à-dire avec un nombre fini d'étapes, d'actions. Supposons aussi que

tous les joueurs connaissent toutes leurs actions possibles. Certaines de ces actions peuvent être effectuées dans un ordre précis ; cet ensemble d'action(s) est alors nommé stratégie. Et puisqu'il y a un nombre fini d'actions, il y a un nombre fini de stratégies $\pi_{i1}, \pi_{i2}, \pi_{i3}, ...$; où π_{i1} est la stratégie 1 du joueur i. Une petite explication s'impose : effectivement, il est très étrange de parler de première, de deuxième ou de $n^{\text{ième}}$ stratégie d'un joueur, puisque le joueur rationnel que l'on se figure va jouer quelques coups, puis changer de vision du jeu et changer ses plans. Dans l'absolu on peut se dire qu'il change de stratégie en cours de jeu. Or dans la théorie des jeux, chaque stratégie est fixe et, par dessus tout, déterminée avant le début du jeu, de telle manière que toutes les éventualités puissent être prédites. On peut parler de boîte ou ensemble (S) de stratégies finies que possède chaque joueur.
Mais, si le jeu est répété, un des deux joueurs devrait utiliser sa stratégie dite strictement dominante (dont les gains engendrés sont meilleurs quelque soient les combinaisons de stratégies) à tous les coups ou, s'il n'existe pas de stratégie strictement dominante, il devrait jouer de façon intelligente ses meilleures stratégies alternativement. La stratégie mixte est donc un choix de stratégies qui permet au joueur d'avoir le maximum de gains possible.

– **La stratégie mixte**
  Ce choix est dicté par les probabilité dans la théorie des jeux. Prenons le cas de "feuille-caillou-ciseaux". Max décide d'adopter la stratégie pure de toujours jouer "feuille". Son adversaire Joe va le remarquer et va répliquer en jouant "ciseau" à chaque fois. Max remarque donc qu'il ferait mieux de jouer de temps en temps autre chose arbitrairement, jusqu'à découvrir qu'il pourrait très bien jouer une fois sur trois "caillou", une fois sur trois "feuille" et une fois sur trois "ciseaux", au hasard. Ainsi, il adopte une stratégie mixte sur une action lors d'un jeu dit répété. La transposition sur un jeu plus long n'est pas très compliquée, si ce n'est qu'une stratégie mixte peut contenir des action "pures". La stratégie mixte est ainsi définie pour Max et tout joueur i :

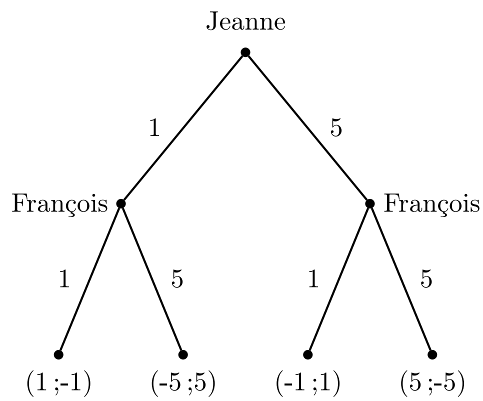
$$s_i = \sum_{\alpha} c_{i\alpha} \pi_{i\alpha}$$

  où $c_{i\alpha}$ est la probabilité de jouer des stratégies pures $\pi_{i\alpha}$.
  On note s une stratégie mixte, s_1 la stratégie mixte du joueur 1, s_2 la stratégie mixte du joueur 2, s_i la stratégie mixte du joueur i.
  Le joueur 1 aura évidemment une infinité de stratégies mixtes : une stratégie s_1, une stratégie t_1, une stratégie u_1 etc., avec un coefficient $c_{i\alpha}$ affilié à chacun, où $c_{i\alpha} \in [0; 1]$
  Enfin, $\sum_\alpha c_{i\alpha} = 1$, étant donné que les coefficients $c_{i\alpha}$ sont des probabilités. Dans ce jeu, on aurait $c_{i1} = c_{i2} = c_{i3} = \dfrac{1}{3}$ et $\sum_\alpha c_{i\alpha} = 1/3 + 1/3 + 1/3 = 1$.

  Le concept de stratégie mixte consiste donc à varier la stratégie de manière aléatoire et imprévisible par l'adversaire, selon des probabilités.

L'étude du jeu peut se faire de plusieurs manières : la transposition des valeurs sur un tableau ou sur une matrice, la modélisation par un arbre ou l'étude de fonctions.

L'arbre est évidemment plus imagé, c'est donc celui par lequel nous allons commencer. Imaginons un jeu très simple à deux joueurs : François et Jeanne. Nos deux joueurs jouent au jeu *"Matching coins"*[18]. Les deux joueurs jouent avec deux types de pièces (celles de 1 franc et celles de 5 francs dans ce cas) ; ils vont en tenir une dans leur main fermée et l'ouvriront ensemble. Si Jeanne et François ont la même pièce, alors François prend les deux. Si elles sont différentes, c'est Jeanne qui les prend. Voila l'arbre qui illustre ce cas.

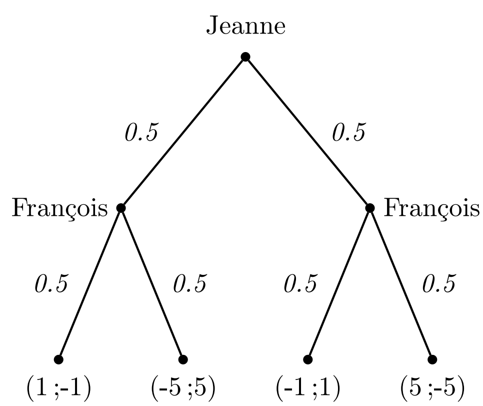


La première chose que l'on remarque, c'est que même si les actions des deux joueurs prennent place au même moment, il s'agit de choisir un joueur arbitrairement et de le placer en amont sans considérer l'arbre de manière temporelle. D'où la dénomination du processus : représentation extensive.

On appelle cet arbre l'arbre de Kuhn, constitué de branches et de points appelés sommets. Les branches indiquent les stratégies utilisées par le joueur et les sommets indiquent le moment où un des joueurs se retrouve devant un choix. Enfin, sur les sommets au bout de l'arbre, l'analyste indique le nombre de points gagnés par chaque joueur.

Il semble important de rappeler qu'une telle analyse ne peut être réalisée sans quantifier tous les facteurs du jeu mentionnés dans le chapitre précédent.

Supposons à présent que François choisisse la stratégie mixte qui consiste à sortir une fois sur deux une pièce de cinq et une fois sur deux une pièce de 1, idem pour Jeanne.



Analysons maintenant la représentation normale du même jeu (soit la représentation sous forme de tableau).

		J	
		j_1	j_2
F	f_1	(1,-1)	(-1,1)
	f_2	(5,-5)	(-5,5)

Les lettres J et F représentent nos deux joueurs. f_1 et f_2 sont les stratégies de François et il y a une certaine probabilité qu'il joue l'une ou l'autre. Les deux stratégies possibles pour François sont, souvenons-nous, de choisir une pièce de 1 franc ou de 5 francs. Il en va de même pour Jeanne. Les lettres en minuscule remplacent les branches de l'arbre. Comme pour l'arbre, si les joueurs adoptent des stratégies mixtes à la place de stratégies pures, on note les probabilités :

		J	
		1/2	1/2
F	1/2	(1,-1)	(-1,1)
	1/2	(5,-5)	(-5,5)

Ensuite, le mathématicien peut transposer ces données dans une matrice lorsque le jeu est à somme nulle, comme ici. Dans ce cas les gains d'un seul joueur sont affichés sur la matrice, étant donné que les gains de l'adversaire sont opposés. Des calculs matriciels permettent de déterminer la stratégie optimale pour chaque joueur indépendamment de la stratégie adverse avec un nombre de stratégies n. La matrice des gains de F se présente ainsi :

$$M_F = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$$

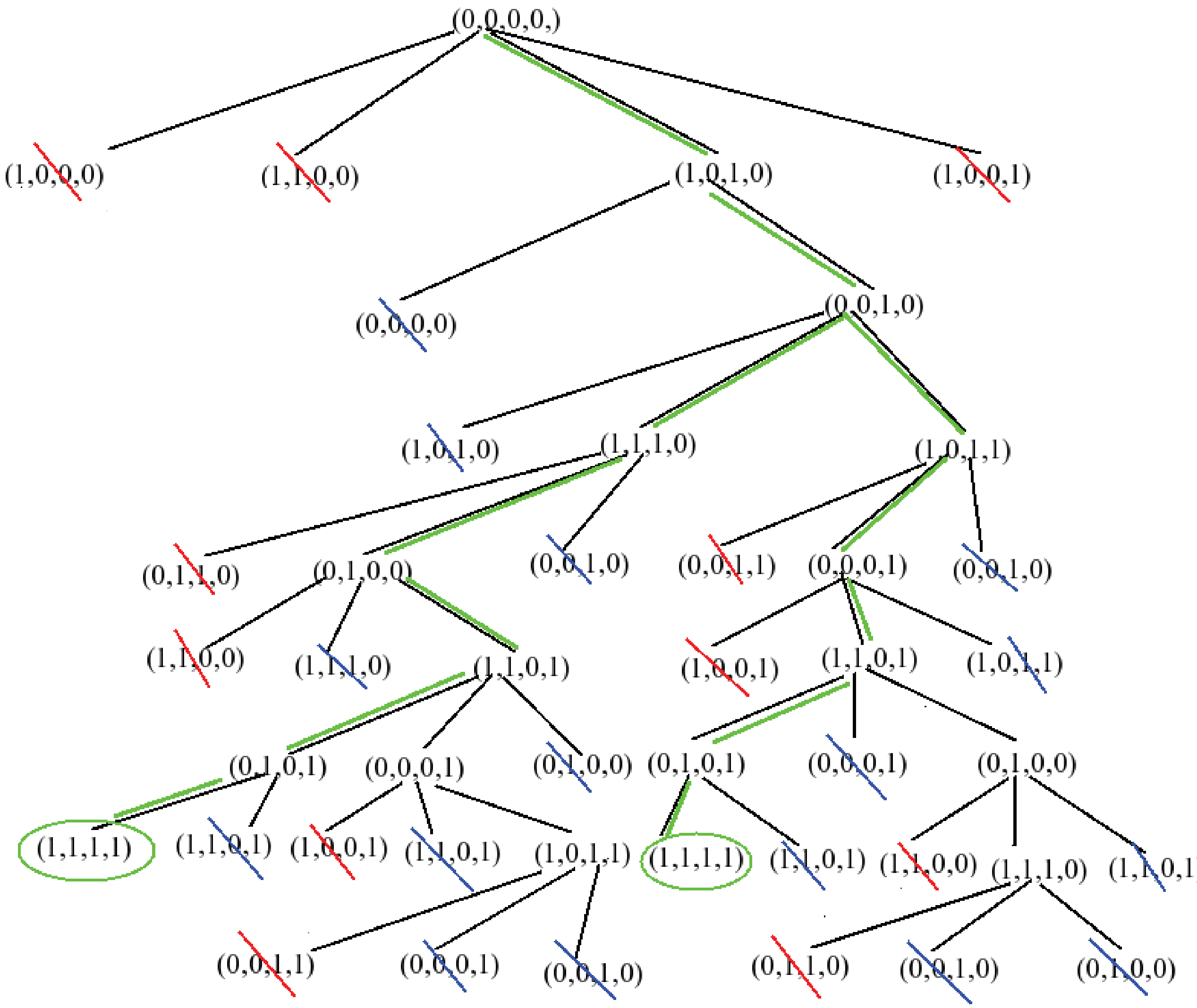
Enfin, la modélisation sous forme de fonction linéaire est utilisée pour calculer l'Equilibre de Nash. Par extension, certains jeux peuvent également être modélisés sous forme graphique une fois l'Equilibre de Nash défini, puisqu'il existe des fonctions ; ce sujet sera traité plus tard.

7.3 L'identification de la stratégie optimale

Rappelons-le, nous avons principalement vu deux types de modélisations du jeu : l'arbre de Kuhn et le tableau. La position des gains dans le tableau indique directement la stratégie à adopter pour y arriver.

Prenons un exemple : **le loup, la chèvre et le chou**. Il s'agit d'une énigme connue reprise par un étudiant anonyme de l'université de Laval au Canada[4]. Un homme, muni d'une barque, se trouve sur une rive avec un loup, une chèvre et un chou. Le but étant de faire passer ces trois de l'autre côté de la rive. Cependant, nous savons aussi que si l'homme laisse la chèvre seule avec le chou, elle le mangera ; il en va de même s'il laisse le loup avec la chèvre.

Modélisation du jeu : On commence par quantifier le problème. Il s'agit d'un jeu à un joueur. Ensuite on va représenter le mouvement des objets en les affiliant au numéro 0, si l'objet est sur la rive de gauche et 1, si l'objet est sur la rive de droite. Si l'on écrit (0,0,0,0), c'est que l'homme est sur la rive de gauche avec le loup, la chèvre et le chou, dans l'ordre. C'est le point de départ à partir duquel l'homme se retrouve devant quatre choix. En voici le graphique :



`http://www.mat.ulaval.ca/uploads/media/ArbreResolutionProbleme.pdf.`

A noter : peu conventionnellement, cet arbre représente la stratégie utilisée dans chacun de ses sommets au lieu de représenter le gain, que l'on pourrait par ailleurs numériser à -1 pour la perte et 1 pour le gain du jeu. La méthode de résolution consiste à remonter l'arbre de Kuhn, après avoir éliminé les résultats où le jeu est perdu. On se rend compte que seules deux issues du jeu font se rencontrer les quatre objets. Le cheminement y accédant est déterminé en remontant l'arbre de Kuhn. Les deux stratégies pures (ici, aucun hasard n'est en jeu) sont ainsi déterminées.

Voilà comment se résume la résolution du jeu :

1. Organiser le jeu en autant de sous-jeux qu'il y a de tours : le premier sous-jeu correspond au dernier tour.
2. Dans le premier sous-jeu, supprimer les stratégies strictement dominées (toute stratégie qui engendre un gain inférieur à une autre est supprimée).
3. Considérer le jeu avec les stratégies dominées en moins.
4. Supprimer à nouveau, si besoin, les stratégies dominées.
5. Effectuer la même analyse pour le sous-jeu suivant, s'il y en a. Et procéder ainsi jusqu'au dernier sous-jeu, autrement dit, le premier tour.

Cependant, il arrive souvent qu'il n'y ait pas de stratégie optimale qui soit strictement dominante. Dans ce cas, on peut approximativement désigner une stratégie optimale, dans le sens où elle est la plus favorable en fonction du gain qui y est attribué. Une autre solution est de rechercher l'équilibre de Nash, c'est le sujet de la cinquième partie de ce travail.

7.4 Attribution des stratégies optimales

Il faut se rappeler avant tout que la théorie des jeux consiste à déterminer un gagnant avant qu'un quelconque pion ou dé ne soit joué. Le ou les gagnants peuvent être déterminés avec un certain degré d'incertitude dû au hasard ou aux multiples choix supposés des joueurs, gérés par les probabilités. Il faut donc préméditer les coups des joueurs. Pour cela, le mathématicien commence par déterminer le type de jeux dont il s'agit. Il poursuit par l'analyse du déroulement du jeu et détermine la meilleure stratégie à adopter.

L'étude peut aboutir sur trois cas différents :

– Le dilemme est un cas où non seulement le théoricien ne peut déterminer qui sera le gagnant du jeu, mais il ne peut conseiller une stratégie à jouer. Ces cas sont rares et très bien illustrés par le dilemme du prisonnier.

– Le jeu a plusieurs issues possibles estimées par des probabilités. La meilleure stratégie possible pour chaque joueur peut être connue, et l'issue du jeu peut être déterminée par un équilibre. C'est dans ce cas que le théorème de l'Equilibre de Nash opère, puisqu'il consiste à trouver non pas la meilleure stratégie pour chaque joueur indépendamment, mais la stratégie qui maximise les gains d'un joueur, quoi que fassent les joueurs adverses ; c'est une sorte de compromis.

– On connaît le gagnant !
A condition que le joueur en question respecte la stratégie optimale ou gagnante jusqu'au bout, il gagne le jeu.

A nouveau, dans un jeu il ne s'agit pas toujours de gagner tout seul comme le veut un simple jeu de société. Mais l'analyse de situations réelles veut que plusieurs joueurs gagnent, que tous gagnent (le compromis) ou que tous perdent.

Enfin, il existe une dernière possibilité : l'issue où tous les joueurs auront maximisé leurs gains et l'Equilibre de Nash n'y correspond pas toujours.

Cinquième partie

L'apport de John Nash dans la théorie des jeux

8 L'Equilibre de Nash

John Nash voulut certainement déterminer l'existence d'une stratégie mixte pour un joueur qui lui assurerait la meilleure espérance de gain. Pour s'approcher d'une solution universelle d'un jeu, il commença par prouver qu'il existe, dans un jeu, une stratégie α pour le joueur i telle que, quelles que soient les stratégies adverses, ce dernier obtiendra un gain supérieur aux autres stratégies.

8.1 Démonstration

8.1.1 La définition d'un Equilibre de Nash

Ce chapitre a été réalisé sur la base de la copie originale de la thèse de John Nash dans "The Essential John Nash"[16]. Concentrons-nous sur l'espérance de gains d'un des joueurs lorsque chacun joue une certaine stratégie (mixte) :

Nous savons que :

$$s_i = \sum_{\alpha} c_{i\alpha}\pi_{i\alpha} \text{ pour tout } i$$

Imaginons donc que le joueur 1 joue la stratégie s_1, que le joueur 2 joue s_2 et que le joueur 3 joue s_3. L'espérance de gains du joueur 1 se notera $P_1(s_1, s_2, s_3)$, sachant que le joueur 2 peut très bien anticiper autre chose : $P_2(s_1, s_2, s_3)$ (idem pour le joueur 3).

Pour simplifier on peut condenser, comme Nash l'a fait : $S = (s_1, s_2, s_3)$ et $T = (t_1, t_2, t_3)$, etc. Ce sont des ensembles de stratégies, en d'autre termes un "scénario" où par exemple deux joueurs i et j jouent leur stratégie s. (Ici $S = (s_i, s_j)$.

Nous avons alors : $P_i(S) = P_i(s_1, s_2, s_3)$

Maintenant, disons que le joueur 2 décide de jouer une autre stratégie, il prévoit :

$$P_2(s_1, t_2, s_3) = P_2(S; t_2)$$

A présent, il est nécessaire de se concentrer sur un cas particulier avec deux joueurs :

Le gain du joueur 1 est déterminé par $P_1(s_1, s_2)$. Une stratégie mixte comportera deux stratégies pures : $s_1 = c_{11}\pi_{11} + c_{12}\pi_{12}$: on suppose que le joueur 1 a deux stratégies pures possibles π_{11} et π_{12} ; alors,

$$P_1(s_1, s_2) = P_1(c_{11}\pi_{11} + c_{12}\pi_{12}, s_2)$$

Comme la fonction est linéaire (si le joueur 1 gagne 5 en jouant la stratégie π_{11}, il gagnera 10 en la jouant aussi au tour suivant ; si le joueur adverse ne change pas sa stratégie s_2, comme ici), on peut développer :

$$P_1(c_{11}\pi_{11} + c_{12}\pi_{12}, s_2) = c_{11}P_1(\pi_{11}, s_2) + c_{12}P_1(\pi_{12}, s_2)$$

Supposons que $P_1(\pi_{11}, s_2) \leq P_2(\pi_{12}, s_2)$:

$$c_{11}P_1(\pi_{11}, s_2) + c_{12}P_1(\pi_{12}, s_2) \leq c_{11}P_1(\pi_{11}, s_2) + c_{12}P_1(\pi_{11}, s_2)$$

$$= (c_{11} + c_{12})P_1(\pi_{11}, s_2) = P_1(\pi_{11}, s_2) \Rightarrow P_1(s_1, s_2) \leq P_1(\pi_{11}, s_2)$$

Pour tout c_{11} et tout c_{12} qui appartiennent à s_1. Par définition, si le gain avec la stratégie π_{11} est toujours plus grand ou égal au gain avec la stratégie π_{12}, alors que la stratégie adverse est la même, π_{11} engendre un gain fixe qui est le point maximum de la fonction des gains avec π_{12}. On peut écrire :

$$\max_{s_1} P_1(s_1, s_2) = \max_{c_{11},c_{12}} P_1(c_{11}\pi_{11} + c_{12}\pi_{12}, s_2) = P_1(\pi_{11}, s_2)$$

Ici, π_{11} est l'unique maximum de la fonction des gains linéaire du joueur 1, mais si le joueur 1 possède plus de 2 stratégies pures, alors plusieurs maximums peuvent coexister. Et on peut désormais affirmer de façon générale qu'il existe une ou plusieurs stratégies pures s_1 qui maximisent le gain du joueur 1, si le joueur 2 ne change pas sa stratégie.

Si ce joueur 1 utilise sa stratégie rapportant le plus de gains :

$$\max_{r_1}[P_1(S; r_1)]$$

On peut même généraliser : si tous les joueurs utilisent leur stratégie la plus avantageuse, alors on obtiendra un certain $P_i(S)$, ici un point d'équilibre, tel que :

$$P_i(S) = \max_{touslesr_i}[P_i(S; r_i)]$$

Or, par définition, tous les r_i réunis forment $r_i = \sum_\alpha c_{i\alpha}\pi_{i\alpha}$

$$\Rightarrow \max_{touslesr_i}[P_i(S; r_i)] = \max_{tousles\pi_{i\alpha}}[P_i(S; \pi_{i\alpha})] = P_i(S)$$

Ceci implique que maximiser toutes les stratégies mixtes revient à maximiser toutes les stratégies pures du même ensemble de stratégies. La distinction entre stratégies pures et mixtes n'est donc plus nécessaire ; il est donc possible d'écrire (pour n'importe quelle stratégie α), $P_{i\alpha}(S) = p_i(S; \pi_{i\alpha})$; avec l'ensemble S qui est un Equilibre de Nash. Or,

$$P_i(S) = \max_{touslesr_i}[P_i(S; r_i)] = \max_{tousles\pi_{i\alpha}}[P_i(S; \pi_{i\alpha})] = \max_\alpha P_{i\alpha}(S)$$

Lorsque le joueur i n'utilise que ses stratégies optimales, il n'utilise pas les $P_{i\alpha}(S) < \max_\beta P_{i\beta}(S)$; et pour ne jamais jouer ces $P_{i\alpha}$, $c_{i\alpha}$ doit être égal à zéro. Tandis que les $P_{i\alpha}$ optimaux remplissent la condition suivante :

$$P_{i\alpha}(S) = \max_\beta P_{i\beta}(S)$$

8.1.2 La preuve de l'existence d'un Equilibre de Nash

La preuve s'articule autour du théorème du point fixe en général, du *Théorème du Point Fixe de Brouwer*, des simplexes et de la transformation d'une fonction.

Un espace fermé a pour particularité d'être borné. Par exemple, un ballon contient un espace fermé, délimité par ses parois. Il faut savoir aussi qu'un espace peut avoir n dimensions, mais rester fermé. Dans un espace à deux dimensions, on peut définir un ou plusieurs points fixes où $f(x) = x$: un des *Théorèmes du Point Fixe* indique que dans un espace fermé à deux dimensions, toute fonction $g(x)$ croisera au moins une fois la fonction $f(x) = x$.

Une transformation T de l'espace fermé X qui se note $T(X)$ implique que l'on "déplace" les bornes de l'espace, mais qu'on lui conserve les mêmes dimensions.

Lors d'une telle transformation, il existe au moins un point "fixe". Par exemple, prenons deux fonctions continues f_1 et f_2 contenues dans un espace X à deux dimensions : on transforme X par la transformation T ; on peut constater que la nature des fonctions peut changer, mais les deux fonctions se croiseront toujours soit sur le même point de l'abscisse, soit sur le même point de l'ordonnée, soit exactement sur le même point. Cette règle est dictée par un autre des *Théorèmes du Point Fixe*.

Pour continuer, il est nécessaire de définir le simplexe : c'est un espace **fermé** à n dimensions borné par des formes triangulaires. Pour revenir à la modélisation de la théorie des jeux, le simplexe peut contenir toutes les stratégies mixtes d'un joueur : les stratégies pures $\pi_{i\alpha}$ constituent les bornes de ce simplexe. Et toutes les stratégies mixtes possibles se retrouvent dans l'espace entre les stratégies pures. Les stratégies mixtes sont plus proches ou plus éloignées de certaines stratégies pures selon le coefficient de probabilité $c_{i\alpha}$. Mais ces stratégies mixtes ne sortiront jamais du simplexe, car une stratégie mixte est, par définition, formée de stratégies pures.

Le mathématicien Luitzen Brouwer propose en 1912 la preuve la plus récente du *Théorème du Point Fixe de Brouwer*. On y lit que tout simplexe, par son état d'espace fermé, peut subir une transformation T qui contiendra un ou des points fixes. De plus, ce point fixe a pour particularité d'être "attractif". Dans le sens où si plusieurs transformations sont opérées successivement, au fil de ces transformations, tout point représentant une stratégie mixte s_i converge vers le ou les points fixes.

En se focalisant sur l'Equilibre de Nash ; on a plus précisément des transformation d'ensembles de stratégies S, où chaque stratégie s a son correspondant "transformé" s'. En bref, le reste de la preuve consiste à prouver qu'une ou plusieurs des stratégies soumises à une transformation peuvent être un point fixe.

8.2 Calcul de L'Equilibre de Nash

La méthode de calcul de l'Equilibre présentée ici peut être retrouvée dans "Introducing Game Theory and its Applications" [19]. Grâce à la précédente preuve, on peut dire qu'un Equilibre de Nash est présent dans tous les jeux qui réunissent les caractéristiques suivantes : ils sont non-coopératifs, à deux joueurs et à information complète. Il est également possible de déterminer quelle est la stratégie que chacun des deux joueurs doit mettre en oeuvre pour parvenir à un Equilibre de Nash. Pour cela, il faut reprendre la définition : il s'agit de la stratégie engendrant un gain qui ne peut être amélioré quelle que soit la stratégie adverse. Dans un jeu ne comportant que des stratégies pures, la méthode consiste à prendre le problème à l'envers : sur un tableau de gain, on analyse la meilleure stratégie à adopter (surmontée d'un astérisque sur le tableau ci-dessous) pour un joueur lorsque **l'autre** a une stratégie fixe. Voici un exemple :

		B	
		β_1	β_2
A	α_1	(4*,2)	(1,4*)
	α_2	(0,1)	**(2*,3*)**

Sur la première ligne (avec α_1 comme stratégie fixe), B peut choisir entre β_1 qui peut lui fournir un gain de 2 ou β_2 pour un gain de 4. Sa meilleure stratégie ici est β_2. L'Equilibre de Nash se trouve en bas à droite puisqu'il s'agit pour tous deux de leur stratégie idéale en réaction à la deuxième stratégie de l'adversaire. Par extension, il s'agit aussi de la stratégie fixe prédominante en réponse aux deux alternatives du joueur A.

Cette méthode fonctionne avec n stratégies pures pour deux joueurs.

Il est cependant plus intéressant de s'attarder sur des jeux à stratégies mixtes qui permettent aussi de trouver un Equilibre de Nash. Il est important de réaliser que dans un cadre réel, un Equilibre de

Nash mixte ne s'applique qu'à des jeux répétés, où les stratégies peuvent être itérativement modifiées. Le calcul ne s'applique cette fois qu'aux jeux à deux joueurs et deux stratégies chacun. Lorsque le joueur B joue une stratégie mixte, il est possible d'affirmer que $\beta_1 + \beta_2 = 1$(voir chapitre stratégies mixtes). Donc l'ensemble $\mathfrak{B} = \beta_1; 1 - \beta_1$ avec $0 \leq \beta_1 \leq 1$ est un ensemble de stratégies $\mathfrak{B}$ du joueur B, auquel correspond l'ensemble $\mathfrak{A}$ du joueur A. Il en va de même pour la stratégie du joueur A. Pour cet exemple, la numérotation des stratégies n'est plus nécessaire.

		B	
		β	$1-\beta$
A	α	(0,1)	**(1*,2*)**
	$1-\alpha$	(4*,1*)	(0,-4)

Voilà un jeu simple avec des gains arbitrairement définis. Pour déterminer le point d'équilibre, il suffit de comparer l'espérance de gain maximum de chacun des joueurs lorsque la stratégie adverse est fixe. Toutefois, le tableau ne prend pas en compte les probabilités et il faut donc procéder à un calcul de probabilités : A sait que B va jouer parfois la colonne β et parfois la colonne $1 - \beta$ en réponse à ses stratégies. Si A joue α, alors B joue soit β qui procure un gain de 0 à A, soit $1 - \beta$ qui lui procure un gain de 1 à A. Le raisonnement est le même pour le cas où A choisit la stratégie $1 - \alpha$. On obtient :

$$\begin{aligned} P_A(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) &= \alpha[0\beta + 1(1-\beta)] + (1-\alpha)[4\beta + 0(1-\beta)] \\ &= \alpha(1-\beta) + (1-\alpha)(4\beta) = -5\alpha\beta + \alpha + 4\beta \end{aligned}$$

Rappelons qu'il faut déterminer α et β qui forment un Equilibre de Nash, c'est-à-dire qui sont des meilleures réponses mutuelles. Dans chaque équation précédente, nous calculons la dérivée partielle et nous posons qu'elle est égale à zéro ; voici ce qui nous y autorise :

Tout d'abord, le joueur A cherche à maximiser $P_A(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = -5\alpha\beta + \alpha + 4\beta$. Si le maximum de la fonction se trouve en $\alpha \in \{0; 1\}$, l'équilibre est pur : $\alpha = 1$ implique que A joue toujours sa stratégie du haut sur le tableau et $\alpha = 0$ implique qu'il jouera toujours la stratégie du bas. Mais quand le maximum est interne à l'intervalle ($\alpha \in]0; 1[$), il faut calculer la dérivée partielle de la stratégie du joueur. Graphiquement, on obtient le maximum ou le minimum de la fonction qui est représentée par une aire quelconque sur un système d'axes tridimensionnel. Avec la dérivée partielle, on enlève une dimension, en étudiant la fluctuation de β sans considérer α. De plus on recherche un point sur le graphique où la dérivée partielle [2] formera une tangente horizontale, i.e. de pente nulle. Donc on pose la dérivée partielle égale à zéro :

$$\frac{\partial P_A}{\partial \alpha} = -5\beta + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{1}{5}$$

Cette réponse nous indique que, quel que soit α, A maximise ses gains (*"best response"* dans le jargon) tant que $\beta = 1/5$. Pour preuve, quand $\beta = 1/5$ et quel que soit α, P_A est fixe :

$$P_A = -5\alpha\beta + \alpha + 4\beta = -5\alpha \cdot \frac{1}{5} + \alpha + 4 \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

Pour terminer, en revenant au tableau : si $\beta \neq \frac{1}{5}$,

– et en particulier quand $\beta > \frac{1}{5}$, la meilleure réponse pour le joueur A est sa stratégie du bas du tableau
– et en particulier quand $\beta < \frac{1}{5}$, la meilleure réponse pour le joueur A est sa stratégie du haut du tableau

Etudions à présent l'espérance de gain de B.

Similairement au cas du joueur A, B sait que A va jouer parfois la ligne α et parfois la ligne $1-\alpha$ en réponse à ses stratégies. Si B joue β, alors A joue soit α qui procure un gain de 1 à B, soit $1-\alpha$ qui lui procure alors un gain de 1 aussi. Le raisonnement est le même pour le cas où B choisit la stratégie $1-\beta$. On obtient :

$$\begin{aligned} P_B(\mathfrak{A},\mathfrak{B}) &= \beta[\alpha + 1(1-\alpha)] + (1-\beta)[2\alpha - 4(1-\alpha)] \\ &= \beta + (1-\beta)(6\alpha - 4) = -6\alpha\beta + 6\alpha + 5\beta - 4 \end{aligned}$$

A nouveau, le joueur B cherche à maximiser $P_B(\mathfrak{A},\mathfrak{B}) = -6\alpha\beta + 6\alpha + 5\beta - 4$. Si le maximum de la fonction se trouve en $\beta \in \{1;0\}$, les stratégies sont pures : $\beta = 1$ implique que B joue toujours sa stratégie de gauche sur le tableau et $\beta = 0$ implique qu'il jouera toujours la stratégie de droite. Aussi, quand le maximum est interne à l'intervalle ($\beta \in]0;1[$),

$$\frac{\partial P_B}{\partial \beta} = -6\alpha + 5 = 0$$

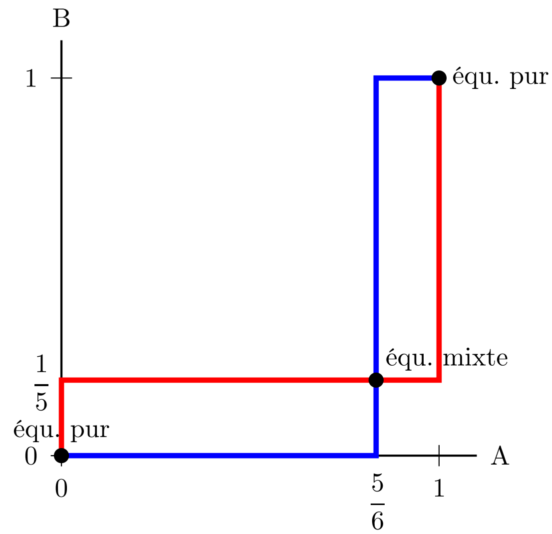
$$\Rightarrow \alpha = \frac{5}{6}$$

Cette réponse nous indique que, quel que soit β, B maximise ses gains tant que $\alpha = 5/6$. Pour preuve, quand $\alpha = 5/6$ et quel que soit β, P_B est fixe :

$$P_B = -6\alpha\beta + 6\alpha + 5\beta - 4 = -6 \cdot \frac{5}{6}\beta + 6 \cdot \frac{5}{6} + 5\beta - 4 = 1$$

Pour terminer, en revenant au tableau : si $\alpha \neq \frac{5}{6}$,

– et en particulier quand $\alpha > \frac{5}{6}$, la meilleure réponse pour le joueur B est sa stratégie de la droite du tableau
– et en particulier quand $\alpha < \frac{5}{6}$, la meilleure réponse pour le joueur B est sa stratégie de la gauche du tableau



Le graphique ci-dessus permet de se rendre compte de la manière dont chaque joueur réagit face à l'adversaire. Les droites représentent les *"sets"* de réactions (stratégies) en réponse à la stratégie mixte adverse. La bleue correspond à la réponse de A ; par exemple si B décide de jouer la stratégie mixte $\beta = 0,5$, alors la ligne rouge comprise entre 0 et 5/6 indique à A de jouer une stratégie quelconque.

En d'autres termes, comme le tableau le suggère, il est préférable pour A de jouer très souvent la stratégie du bas. Et il devrait jouer de temps en temps l'autre stratégie, qui comporte pourtant le risque de gagner moins que B (en haut à droite), mais qui peut lui permettre de se sortir de la situation moins avantageuse en bas à droite. Il est possible de discuter de ce jeu du point de vue de B et du point de vue de A à l'infini.

Analysons à présent un jeu sans Equilibre de Nash pur :

		B	
		β	$1-\beta$
A	α	(4*,2)	(1,4*)
	$1-\alpha$	(0,3*)	(5*,2)

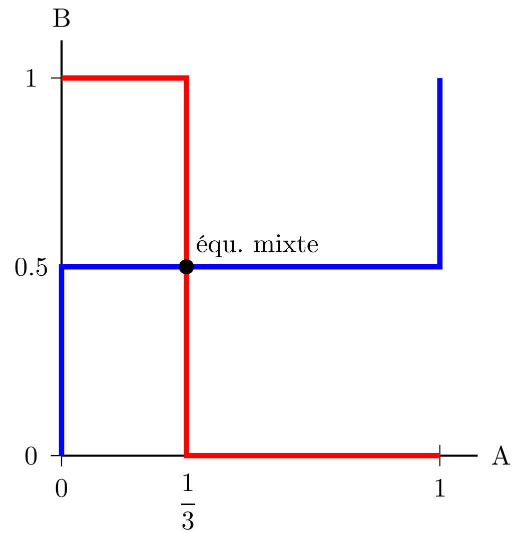
Alors,

$$\begin{aligned} P_A(\mathfrak{A},\mathfrak{B}) &= \alpha[4\beta + 1(1-\beta)] + (1-\alpha)[5(1-\beta)]) \\ &= 3\alpha\beta + \alpha + (1-\alpha)(5-5\beta) = 8\alpha\beta - 4\alpha - 5\beta + 5 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial P_A}{\partial \alpha} = 8\beta - 4 = 0 \Rightarrow \beta = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} P_B(\mathfrak{A},\mathfrak{B}) &= \beta[2\alpha + 3(1-\alpha)] + (1-\beta)[4\alpha + 2(1-\alpha)] \\ &= -\alpha\beta + 3\beta + (1-\beta)(2\alpha+2) = -3\alpha\beta + \beta + 2\alpha + 2 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial P_B}{\partial \beta} = -3\alpha + 1 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3}$$



Dans ce cas, on trouve un équilibre de Nash mixte mais pas d'équilibre pur. On peut très bien le voir sur le graphique : les lignes ne se croisent qu'une fois et pas sur un des sommets du carré du graphique.

Un autre exemple intéressant :

		B	
		β	$1-\beta$
A	α	(4*,2)	(1,4*)
	$1-\alpha$	(0,3)	**(7*,5*)**

Alors,

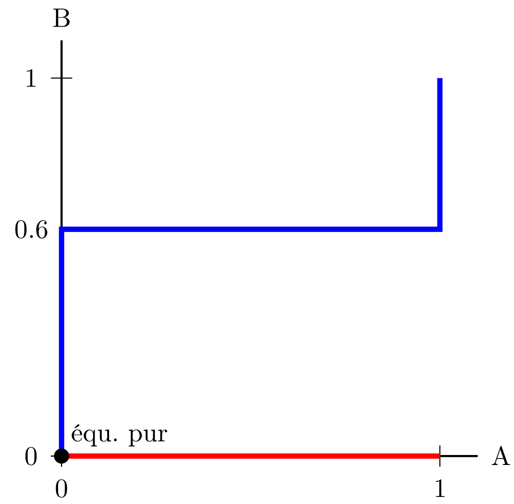
$$\begin{aligned} P_A(\mathfrak{A},\mathfrak{B}) &= \alpha[4\beta + 1(1-\beta)] + (1-\alpha)[7(1-\beta)]) \\ &= 3\alpha\beta + \alpha + (1-\alpha)(7-7\beta) = 10\alpha\beta - 6\alpha - 7\beta + 7 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial P_A}{\partial \alpha} = 10\beta - 6 = 0 \Rightarrow \beta = \frac{3}{5}$$

$$\begin{aligned} P_B(\mathfrak{A},\mathfrak{B}) &= \beta[2\alpha + 3(1-\alpha)] + (1-\beta)[4\alpha + 5(1-\alpha)] \\ &= -\alpha\beta + 3\beta + (1-\beta)(-\alpha+5) = -2\beta - \alpha + 5 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial P_B}{\partial \beta} = -2 \neq 0 \Rightarrow S = \varnothing$$

On en déduit que A et B n'ont pas de stratégie mixte optimale. Cette stratégie mixte est à probabilité nulle, elle est donc pure ! De plus c'est le seul équilibre de Nash :



Cette fois, examinons un cas particulier avec une matrice 3×2

		B	
		β	$1-\beta$
A	α_1	(3,1)	(1,3)
	α_2	(2,2)	(2,1)
	$1-\alpha_1-\alpha_2$	(1,1)	(3,0)

$$\begin{aligned}
P_A(\mathfrak{A},\mathfrak{B}) &= \alpha_1[3\beta+1(1-\beta)]+\alpha_2[2\beta+2(1-\beta)]+(1-\alpha_1-\alpha_2)[\beta+3(1-\beta)] \\
&= 2\alpha_1\beta+\alpha_1+2\alpha_2+(1-\alpha_1-\alpha_2)(-2\beta+3) \\
&= 2\alpha_1\beta+\alpha_1+2\alpha_2-2\beta+3+2\alpha_1\beta-3\alpha_1+2\alpha_2\beta-3\alpha_2 \\
&= 4\alpha_1\beta-2\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_2\beta-2\beta+3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P_A}{\partial \alpha_1} &= 4\beta-2=0 \Rightarrow \beta=\frac{1}{2} \\
\frac{\partial P_A}{\partial \alpha_2} &= 2\beta-1=0 \Rightarrow \beta=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_B(\mathfrak{A},\mathfrak{B}) &= \beta[\alpha_1+2\alpha_2+1(1-\alpha_1-\alpha_2)]+(1-\beta)(3\alpha_1+\alpha_2) \\
&= \alpha_2\beta+\beta+3\alpha_1+\alpha_2-3\alpha_1\beta-\alpha_2\beta \\
&= -3\alpha_1\beta+3\alpha_1+\alpha_2+\beta
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial P_B}{\partial \beta} = -3\alpha_1+1=0 \Rightarrow \alpha_1=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \mathfrak{A}=\left(\frac{1}{3}, a, \frac{2}{3}-a\right) \quad \text{où } a=\left[0;\frac{2}{3}\right]$$

Donc, il existe une infinité d'équilibres de Nash où a se situe entre 0 et $\dfrac{2}{3}$.

Voici un exemple avec trois stratégies pour les deux joueurs :

$$
\begin{array}{cc|ccc|}
 & & & \text{B} & \\
 & & \beta_1 & \beta_2 & 1-\beta_1-\beta_2 \\
\hline
 & \alpha_1 & (0,2^*) & (3^*,-1) & (1,1) \\
\text{A} & \alpha_2 & (6^*,0) & (1,2) & (3,3^*) \\
 & 1-\alpha_1-\alpha_2 & (3,2^*) & (2,3^*) & (4^*,1) \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
P_A(\mathfrak{A},\mathfrak{B}) &= \alpha_1[3\beta_2 + 1(1-\beta_1-\beta_2)] + \alpha_2[6\beta_1 + \beta_2 + 3(1-\beta_1-\beta_2)] \\
&\quad + (1-\alpha_1-\alpha_2)[3\beta_1 + 2\beta_2 + 4(1-\beta_1-\beta_2)] \\
&= \alpha_1(-\beta_1 + 2\beta_2 + 1) + \alpha_2(3\beta_1 - 2\beta_2 + 3) + (1-\alpha_1-\alpha_2)(-\beta_1 - 2\beta_2 + 4) \\
&= -\alpha_1\beta_1 + 2\alpha_1\beta_2 + \alpha_1 + 3\alpha_2\beta_1 - 2\alpha_2\beta_2 + 3\alpha_2 - \beta_1 - 2\beta_2 + 4 + \alpha_1\beta_1 \\
&\quad + 2\alpha_1\beta_2 - 4\alpha_1 + \alpha_2\beta_1 + 2\alpha_2\beta_2 - 4\alpha_2 \\
&= 4\alpha_1\beta_2 + 4\alpha_2\beta_1 - 3\alpha_1 - \alpha_2 - \beta_1 - 2\beta_2 + 4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial P_A}{\partial \alpha_1} &= 4\beta_2 - 3 = 0 \Rightarrow \beta_2 = \frac{3}{4} \\
\frac{\partial P_A}{\partial \alpha_2} &= 4\beta_1 - 1 = 0 \Rightarrow \beta_1 = \frac{1}{4} \\
&\Rightarrow 1 - \beta_1 - \beta_2 = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_B(\mathfrak{A},\mathfrak{B}) &= \beta_1[2\alpha_1 + 2(1-\alpha_1-\alpha_2)] + \beta_2[-\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3(1-\alpha_1-\alpha_2)] \\
&\quad + (1-\beta_1-\beta_2)[\alpha_1 + 3\alpha_2 + 1(1-\alpha_1-\alpha_2)] \\
&= \beta_1(-2\alpha_2 + 2) + \beta_2(-4\alpha_1 - \alpha_2 + 3) + (1-\beta_1-\beta_2)(2\alpha_2 + 1) \\
&= -2\alpha_2\beta_1 + 2\beta_1 - 4\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_2 + 3\beta_2 + 2\alpha_2 + 1 - 2\alpha_2\beta_1 - \beta_1 - 2\alpha_2\beta_2 - \beta_2 \\
&= -4\alpha_1\beta_2 - 4\alpha_2\beta_1 - 3\alpha_2\beta_2 + 2\alpha_2 + \beta_1 + 2\beta_2 + 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial P_B}{\partial \beta_1} &= -4\alpha_2 + 1 = 0 && \Rightarrow \alpha_2 = \frac{1}{4} \\
\frac{\partial P_B}{\partial \beta_2} &= -4\alpha_1 - 3\alpha_2 + 2 = 0 \Rightarrow -4\alpha_1 - \frac{3}{4} + 2 = 0 \Rightarrow 4\alpha_1 = \frac{5}{4} && \Rightarrow \alpha_1 = \frac{5}{16}
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow 1 - \alpha_1 - \alpha_2 = \frac{7}{16}
$$

Cependant, cette méthode ne fonctionne pas toujours pour les jeux à plus de deux stratégies :

		B		
		β_1	β_2	$1-\beta_1-\beta_2$
	α_1	(1,4)	(3,1)	(2,5)
A	α_2	(0,2)	(-2,3)	(3,1)
	$1-\alpha_1-\alpha_2$	(2,1)	(1,2)	(0,2)

$$\begin{aligned}
P_A(\mathfrak{A},\mathfrak{B}) &= \alpha_1[\beta_1+3\beta_2+2(1-\beta_1-\beta_2)]+\alpha_2[-2\beta_2+3(1-\beta_1-\beta_2)]\\
&\quad+(1-\alpha_1-\alpha_2)(2\beta_1+\beta_2)\\
&=\alpha_1(-\beta_1+\beta_2+2)+\alpha_2(-3\beta_1-5\beta_2+3)+(1-\alpha_1-\alpha_2)(2\beta_1+\beta_2)\\
&=-\alpha_1\beta_1+\alpha_1\beta_2+2\alpha_1-3\alpha_2\beta_1-5\alpha_2\beta_2+3\alpha_2+2\beta_1+\beta_2-2\alpha_1\beta_1\\
&\quad-\alpha_1\beta_2-2\alpha_2\beta_1-\alpha_2\beta_2\\
&=-3\alpha_1\beta_1-5\alpha_2\beta_1-6\alpha_2\beta_2+2\alpha_1+3\alpha_2+2\beta_1+\beta_2
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial P_A}{\partial\alpha_1}=-3\beta_1+2=0 \qquad \Rightarrow \beta_1=\frac{2}{3}$$
$$\frac{\partial P_A}{\partial\alpha_2}=-5\beta_1-6\beta_2+3=-\frac{10}{3}+\frac{9}{3}-6\beta_2=0\Rightarrow 6\beta_2=-\frac{1}{3} \qquad \Rightarrow \beta_2=-2$$

Or $\beta_2\in[0;1]$, donc la méthode ne fonctionne pas pour ce jeu.

8.3 Le "dilemme du prisonnier" et la stabilité de l'Equilibre de Nash

Au début des années 1950, les mathématiciens s'intéressent aux jeux avec un petit nombre de joueurs et un petit nombre de stratégies pour lesquels des solutions sont déjà discernables. Et les mathématiciens de la RAND en particulier cherchent à montrer au gouvernement américain et au reste du monde finalement, que la théorie des jeux sert à quelque chose. Pour cela, ils tentent de relier le plus possible leurs résultats à des cas réels. C'est le développement du récit du jeu qui a maintenant une si grande importance dans la discipline et qui est très utile, voire indispensable à la compréhension et à la modélisation du jeu.

Le récit de jeu qui est le plus connu encore de nos jours et qui est largement enseigné dans les domaines économiques est "le dilemme du prisonnier". Il est d'abord précédé par une expérience visant à déterminer la pertinence de l'Equilibre de Nash, en particulier sur les jeux répétés. L'expérience [23] est menée en 1950 par Flood et Dresher, deux mathématicien de la RAND, qui prennent deux cobayes ignorant tout de la théorie des jeux. Il sont positionnés devant un bouton *coopération* et un bouton *défection* chacun dans deux salles séparées. Il est important de noter que ce jeu n'est pas à somme nulle, de telle sorte qu'un des joueurs a un certain avantage sur l'autre. Voici les gains en fonction des boutons appuyés.

		Joueur B	
		coopération	défection
Joueur A	coopération	(0.5, 1)	(-1, 2*)
	défection	(1*, -1)	(0*, 0.5*)

Les gains en bleu sont le point d'Equilibre de Nash pur déterminé grâce à la marche à suivre du chapitre précédent. Ce que Flood et Dresher vont réaliser au fil de ce jeu exécuté cent fois pour l'expérience, c'est que la défection simultanée de A et B ne s'est produite que dans 14% des cas et la coopération mutuelle s'est produite majoritairement.

Ce cas nous intéresse car l'Equilibre de Nash n'est pas respecté : la défection mutuelle est l'équilibre le plus stable. C'est pour cela que dans un jeu à un seul tour, les joueurs vont préférer la défection, car celle-ci assure un gain ou du moins évite toute perte. Pour le joueur A par exemple, la défection lui apporte un gain de 2 ou de 0,5. En revanche, la coopération lui apporte le risque que le joueur B joue la défection et gagne la partie. A long terme, la défection mutuelle est le choix le plus simple, mais lors de l'expérience, le joueur B réalise très vite que la coopération mutuelle est bénéfique pour les deux et il a un avantage : ses gains sont supérieurs à A dans trois des 4 cas possibles. B va donc opter pour la coopération et si A ne coopère pas sur un tour, B le punit au tour suivant par une défection où A ne gagne rien (la case en bas à droite). Durant tout le jeu on constate que A cherche de temps en temps a gagner des points sur B par la défection, mais en définitive, A a intérêt à suivre B sur la coopération qui lui rapporte plus de gains. L'Equilibre de Nash n'est pas respecté dans cette situation "réelle" avec des cobayes car l'équilibre instable de la coopération mutuelle, rapportant plus aux deux joueurs, peut être souvent atteint grâce une stratégie dite de "donnant-donnant" ou *"tit for tat"* en anglais.

De manière générale, donnant-donnant est une stratégie mixte qui dépend de la réaction de l'adversaire. Cette stratégie peut être utilisée dans les jeux répétés. Le joueur adoptant cette stratégie coopère toujours sauf quand l'adversaire le provoque, dans quel cas il se venge. Mais le joueur pardonne très vite (c'est-à-dire au coup suivant), et revient à la coopération. Le dernier tour est donc décisif, puisqu'aucune punition ne s'ensuit.

Cette stratégie est une manière d'atteindre l'Equilibre de Nash le plus instable et le plus avantageux pour les deux joueurs dans certains cas, comme l'illustre "le dilemme du prisonnier".

Flood et Dresher présenteront leur expérience à John Nash qui répliquera : "La faille de [cette] expérience en tant que test de la théorie du point d'équilibre est qu'elle revient en réalité à engager les joueurs dans un seul jeu comportant une longue série de coups. On ne se représente pas aussi bien la chose comme une suite de jeux indépendants qu'avec les jeux à somme nulle. Il y a trop d'interactions, ce qui apparaît clairement dans les résultats de l'expérience"[23]

Bien sûr, ces "interactions" sont représentées par la stratégie donnant-donnant utilisée lors de l'expérience, qui éloigne les deux joueurs de l'Equilibre de Nash le plus stable vers celui le plus instable.

Quelques mois après l'expérience de Flood et Dresher, en 1950, Albert W. Tucker s'intéresse au principe de la coopération et de la tentation de défection dans un jeu, cette fois plus symétrique, et créée le "dilemme du prisonnier". C'est l'histoire de deux malfrats (Jack et Joe) capturés par la police et incarcérés séparément, contre lesquels on ne trouve pas assez de preuves pour les condamner à une peine. Le commissaire sait qu'ils sont complices car ils appartiennent au même gang, il a donc l'idée de les installer chacun dans une salle d'interrogatoire, ceci sans les avertir. Ils se retrouvent alors séparés et incapables de communiquer jusqu'à ce que les deux interrogatoires simultanés soient terminés. Vient alors un policier dans chaque salle qui leur explique le marché : le prisonnier a le choix de dénoncer son acolyte, dans quel cas il est libre et l'autre écope de 3 ans de prison. Cependant, si son acolyte le dénonce aussi, les deux auront une peine de 2 ans de prison. Enfin, si les deux refusent de témoigner, ils n'auront que 1 an de prison. Une fois la décision prise, le policier lui révèle ce que son partenaire a choisi de dire et la sentence est appliquée.

La trame de l'histoire peut varier et il existe plusieurs modélisations numériques du jeu, certains inscrivent des gains négatifs dans le tableau pour exprimer la perte que représentent les années en prison et certains utilisent des écarts de gains différents. L'écart est significatif, puisqu'il peut affecter les stratégies mixtes amenant à l'Equilibre de Nash.

		Jack	
		refuse le marché	témoigne
Joe	refuse le marché	(-1,-1)	(-3,0*)
	témoigne	(0*,-3)	(-2*,-2*)

Logiquement, le témoignage qui porte un tort à l'adversaire représente la défection et si le joueur refuse le marché, il coopère avec son acolyte qu'il ne dénonce pas. Rappelons-le, l'Equilibre de Nash en stratégie pure indique le point où chacun des joueurs ne peut espérer un meilleur gain en changeant sa propre stratégie. Mais l'on remarque très vite qu'il existe une case plus bénéfique aux deux joueurs comme pour le jeu de Flood et Dresher. Sur un jeu répété, il existe plusieurs Equilibres de Nash mixtes que l'on ne peut calculer grâce à la méthode de résolution de l'Equilibre de Nash présentée au chapitre "Calcul de l'Equilibre de Nash", car ce sont des raffinements de l'Equilibre.

8.4 Les applications à l'étude de marché

A part dans la résolution de jeu, l'Equilibre de Nash et ses raffinements s'appliquent à beaucoup de matières scientifiques, telle la biologie avec la stratégie révolutionnairement stable de Smith et Price ou l'interprétation de l'instinct animal. Cette théorie reste cependant un outil d'observation, et tout particulièrement dans le domaine économique. Cependant, l'on peut répertorier quelques applications directes de l'équilibre, dans le sens où il permet de définir une solution dans une modélisation de cas concrets. Deux sujets seront abordés ici ; l'un relevant de l'étude de l'offre et de la demande sur un marché à deux concurrents, et l'autre relevant de la théorie des enchères. Ces deux ont comme point commun d'être des disciplines antérieures à la découverte de l'Equilibre en 1951 ; la première discipline établissait déjà un Equilibre de Nash pur.

8.4.1 L'Equilibre de Cournot

Nash n'était pas le premier à avoir découvert un équilibre dans un jeu à deux joueurs ; en fait, c'est déjà en 1838 que Antoine-Augustin Cournot, un mathématicien français, découvre qu'il est possible de calculer l'équilibre pur d'un jeu à deux joueurs. Pour une finalité similaire à celle de la théorie des jeux, il étudie l'économie de façon mathématique ; c'est-à-dire qu'il s'intéresse à modéliser et généraliser la théorie de marché, à commencer par le modèle de l'offre et la demande. En étudiant ce sujet, Cournot aborde la théorie de l'oligopole [1] en 1838. La forme d'oligopole que le mathématicien étudie consiste en un marché concurrentiel réunissant n propriétaires possédant le même bien et se partageant la vente de celui-ci de manière à créer un équilibre stable. Chaque concurrent a le pouvoir sur le marché, en d'autres termes la quantité qu'il vend a un impact sur le prix du bien, de plus cette quantité est choisie simultanément par tous les joueurs. Dans ce cas, Cournot prouve que le prix et la quantité du bien va automatiquement se fixer à un équilibre qui détermine une quantité vendue égale à chaque joueur. Dans ce cas, un joueur qui serait tenté de changer la quantité qu'il vend, se verrait "sanctionné" par une baisse ou une hausse générale des prix de telle sorte que, par répétition du jeu, il atteigne à nouveau l'équilibre. On parle ici d'équilibre stable.

La modélisation mathématique du duopole sera plus ou moins fidèlement reprise du livre "Game Theory, An Introduction"[8]. Le cas d'oligopole le plus simple à analyser est le duopole : le cas où deux entreprises se disputent le monopole. On leur attribue les noms I et J, respectivement. A partir du moment où I fixe arbitrairement la quantité qu'il vend, J détermine le prix de vente, dépendant de la

1. Oligopole : Marché dans lequel il n'y a qu'un petit nombre de vendeurs, en principe de grande dimension, en face d'une multitude d'acheteurs. (Exemple : le marché de l'automobile, des ordinateurs.) – Larousse de la langue française

somme $i+j$, en fixant la quantité j de biens qu'il vend. On prend en considération le coût unitaire de production du bien c. I et J ont donc un nombre infini de stratégies pour déterminer la quantité vendue dont le domaine de définition est $D_f = [0; M]$, où M est la quantité exacte correspondant à la demande (monopole). La valeur unitaire (prix) V du bien en fonction de la quantité vendue Q est déterminée selon la fonction suivante dans nos exemples :

$$V(Q) = \Gamma - (i+j)$$

Γ est le prix maximum qu'un consommateur serait prêt à payer pour l'objet. A ce stade, se présente un problème : les unités ne sont pas les mêmes dans un cas concret comme celui-ci. Voilà pourquoi on imagine qu'il existe une constante de normalisation des unités appelée α tel que αi et αj ont une unité monétaire. Ensuite, admettons, pour simplifier les calculs, que $\alpha = 1$, alors $\alpha(i+j) = \alpha i + \alpha j = i + j$. Donc α n'a pas besoins d'être pris en compte dans les calculs, mais élimine la problématique des unités. Reste à calculer l'espérance de gain des joueurs, en considérant que leur but est de maximiser leur gain **connaissant la quantité vendue par l'adversaire** :

$$\begin{cases} P_I(i,j) = i[\Gamma - (i+j) - c] = i\Gamma - i^2 - ij - ci \\ P_J(i,j) = j[\Gamma - (i+j) - c] = i\Gamma - j^2 - ij - cj \end{cases}$$

Comme auparavant, on calcule la dérivée partielle des deux équations pour calculer l'Equilibre de Nash :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial PI}{\partial i} = \Gamma - 2i - j - c = 0 \\ \dfrac{\partial PJ}{\partial j} = \Gamma - 2j - i - c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma - 2i - j - c = 0 \\ j = \dfrac{\Gamma - i - c}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma - 2i - \dfrac{\Gamma - i - c}{2} - c = 0 \\ j = \dfrac{\Gamma - i - c}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\Gamma - 4i - \Gamma + i + c - 2c = 0 \Leftrightarrow \Gamma - 3i - c = 0 \Leftrightarrow i = \dfrac{1}{3}(\Gamma - c) \\ j = \dfrac{\Gamma - i - c}{2} \end{cases}$$

En substituant :

$$\frac{\partial PI}{\partial i} = \Gamma - 2i - j - c \Rightarrow j = \Gamma - \frac{2\Gamma - 2c}{3} - c = \frac{1}{3}(\Gamma - c) = i$$

Avec cet Equilibre de Nash on a :

$$V(Q) = \Gamma - (i+j) = \Gamma - \frac{2}{3}(\Gamma - c)$$

et le gain est :

$$P_{I,J}(i,j) = i[\Gamma - (i+j) - c] = \frac{\Gamma - c}{3}\left(\Gamma - \frac{2\Gamma - 2c}{3} - c\right) = \left(\frac{\Gamma - c}{3}\right)\left(\frac{\Gamma - c}{3}\right) = \frac{1}{9}(\Gamma - c)^2$$

Il est intéressant alors d'étudier la situation de monopole pour I :

$$P_I(i,0) = i(\Gamma - i - c) = \Gamma i - i^2 - ci$$

Avec la dérivée partielle :

$$\frac{\partial \pi_I}{\partial i} = \Gamma - 2i - c = 0 \Rightarrow i = \frac{1}{2}(\Gamma - c)$$

L'idéal serait donc de produire $1/4(\Gamma - c)$ chacun, avec des prix et une quantité plus grande et une marge plus grande. Cependant ce partage moitié-moitié, s'il était déterminé entre les deux entreprises, ne serait pas stable : si une des deux entreprises change le coût du produit pour améliorer son profit, alors l'adversaire réagira face à la perte d'un certain nombre de clients en changeant le prix de vente ou la quantité. Et l'Equilibre de Nash prédit que, dans un jeu répété comme celui-ci, les deux entreprises vont forcément arriver au point d'équilibre à force de répondre aux changements de stratégie de l'adversaire.

Le duopole de Cournot est très intéressant, mais malheureusement il a ses limites :

1. On note que le profit d'une firme dépend du prix auquel l'autre firme vend son bien. Mais comment le prix de vente peut-il être connu par le concurrent ? Il doit être possible de l'estimer, mais il est peu probable de le connaître.

2. Ce calcul ne prend pas en compte la demande, mais uniquement l'offre des produits. Le calcul suppose en fait que le concurrent a déjà pris en compte la demande en fixant son prix de vente. Et c'est sur ce prix de vente que le calcul est basé.

Et comme pour l'Equilibre de Nash, l'Equilibre de Cournot a des raffinements qui permettent de l'assimiler à des cas plus concrets. Pour commencer, il existe un modèle de Cournot avec coûts incertains : l'Equilibre de Cournot-Nash du mathématicien Martin Shubik. C'est-à-dire qu'il est tenu pour compte qu'un joueur ne peut connaître précisément le prix de vente de son concurrent. La méthode de calcul est très similaire au modèle de base, en dehors du fait qu'elle requiert l'utilisation des probabilités ; à nouveau la technique s'apparente à l'Equilibre de Nash. Les règles du jeu sont les mêmes. Seulement, une des compagnies ne connaît pas le prix de vente de l'autre, mais l'estime. Cette fois, on distinguera donc leur prix de vente respectif (c_I, c_J). Pour cet exemple, J connaît son coût de vente et celui de I, mais I ne connait que le sien. I doit donc estimer la valeur c_J. On distinguera C_J le prix de vente de J estimé par I. c_J^+ représentera un prix réel plus élevé que l'estimation de I, et c_J^- représentera un prix réel plus bas que l'estimation de I ; et ce, avec une probabilité de p et $1-p$ respectivement.

Il est alors facile de calculer leurs gains respectifs :

$$\begin{cases} P_I(i,j) = i[\Gamma - (i+j) - c_I] \;\; = \Gamma i - i^2 - ij - c_I i \\ P_J(i,j) = j[\Gamma - (i+j) - C_J] = \Gamma j - j^2 - ij - C_J j \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial PI}{\partial i} = \Gamma - 2i - j - c_I = 0 \\ \dfrac{\partial PJ}{\partial j} = \Gamma - 2j - i - C_J = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma - 2i - c_I = j \\ \Gamma - 2j - C_J = i \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow i &= \Gamma - 2(\Gamma - 2i - c_I) - C_J \\ &= -\Gamma + 4i + 2c_I - C_J \end{aligned}$$

$$i = \frac{\Gamma - 2c_I + C_J}{3}$$

$$\Rightarrow j = \Gamma - 2\left(\frac{\Gamma - 2c_I + C_J}{3}\right) - c_I = \frac{3\Gamma - 2\Gamma + 4c_I - 2C_J - 3c_I}{3} = \frac{\Gamma + c_I - 2C_J}{3}$$

On peut à présent considérer les deux solutions suivantes pour la quantité vendue par J :

$$j = \frac{\Gamma + c_I - 2C_J}{3} \begin{cases} j^+ = \dfrac{\Gamma + c_I - 2c_J^+}{3} \\ j^- = \dfrac{\Gamma + c_I - 2c_J^-}{3} \end{cases}$$

En appliquant les probabilités relatives à c_J^+ et à c_J^- pour trouver i^* :

$$\begin{aligned} i^* &= p\left(\frac{\Gamma - 2c_I + c_J^+}{3}\right) + (1-p)\left(\frac{\Gamma - 2c_I + c_J^-}{3}\right) \\ &= \frac{\Gamma - 2c_I + pc_J^+ + (1-p)c_J^-}{3} \end{aligned}$$

Et il est possible d'appliquer les probabilités relatives à c_J^+ et à c_J^- pour j^* :

$$\begin{aligned} j^* &= p\left(\frac{\Gamma + c_I - 2c_J^+}{3}\right) + (1-p)\left(\frac{\Gamma + c_I - 2c_J^-}{3}\right) \\ &= \frac{\Gamma + c_I + p(-2c_J^+) + (1-p)(-2c_J^-)}{3} \\ &= \frac{\Gamma + c_I + -2[pc_J^+ + (1-p)c_J^-]}{3} \end{aligned}$$

Pour comprendre l'utilité de l'introduction des probabilités dans le calcul d'équilibre, voici un exemple :

Avec arbitrairement

$$\begin{aligned} \Gamma &= 40.- \\ c_I &= 5.- \\ c_J^+ &= 7.- \\ c_J^- &= 3.- \end{aligned}$$

Si le producteur I estime C_J à 5.- par exemple, alors $i^* = 1/3(40 - 10 - 5) = 8.3$
Et en attribuant des probabilités aux c_J^+ et c_J^-, le résultat sera légèrement différent mais débouchera toujours sur une approximation :

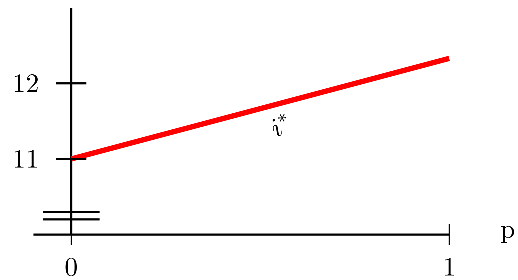
Avec $p = 0.4$: $C_J = 0.4 \cdot 7 + 0.6 \cdot 3 = 2.8 + 1.8 = 4.6$

et $i = 1/3(40 - 10 - 4.6) = 8.47$

Il serait cependant plus intéressant pour l'entrepreneur I de reconnaître ces probabilités comme inconnues ; c'est là où notre formule et l'Equilibre de Nash entrent en scène :

$$i^* = \frac{1}{3}[40 - 10 + p \cdot 7 + (1-p)3] = \frac{4p + 33}{3} = \frac{4}{3}p + 11$$

Cette fonction ainsi calculée permet d'avoir une idée de la variation de l'estimation de la quantité produite par l'adversaire en fonction des probabilités que l'on donne :



Pour terminer, l'équilibre de Cournot est une application de l'Equilibre de Nash sur le marché, puisqu'il requiert la connaissance d'un Equilibre de Nash pur, même si la théorie fut établie plus d'un siècle auparavant.

8.4.2 Les enchères

Pour le développement de ce chapitre, les sources [9] [17] [10] [11] [25] ont été utilisées.
Lorsque plusieurs acteurs négocient ensemble sur la valeur d'un objet, ils peuvent s'entendre entre eux ; auquel cas, il s'agit de négociations multilatérales, ou bilatérales (lorsqu'il ne s'agit que de deux acteurs). Une autre façon d'établir le prix d'un objet est l'enchère. Cette méthode est utilisée dans les cas où les biens à vendre n'ont pas de demande quantifiable.

Les enchères ont une très vieille histoire : elles étaient sans doute utilisées par les hommes des cavernes et devinrent indispensables aux Babyloniens pour acheter des esclaves ; et aujourd'hui elle sont indispensables à eBay pour prospérer dans le marché sur Internet, en passant par Christie's ou Sotheby's et leurs fameuses enchères à la criée pour vendre des oeuvres d'art inestimables. Et pourtant, bien plus importantes aujourd'hui et peu connues, sont les enchères de fréquences téléphoniques qui ont lieu dans beaucoup de pays, dans un marché où seules quelques compagnies se font concurrence. On peut mentionner aussi l'application des enchères au droit d'atterrissage dans les aéroports, au pétrole offshore ou aux très actuels droits de pollution.

Tout un chacun a pu remarquer qu'il existe plusieurs types d'enchères pour satisfaire à chacune de ces situations. En théorie des jeux, on fait généralement les distinctions suivantes :

- **L'enchère anglaise** *(English auction)*, où les mises sont annoncées publiquement jusqu'à ce qu'il ne reste plus d'enchérisseur voulant proposer une nouvelle offre, auquel cas le dernier enchérisseur acquiert l'objet au prix qu'il a misé.
- **L'enchère anglaise au deuxième prix,** où le meilleur enchérisseur emporte l'objet en payant la deuxième meilleure mise.
- **L'enchère scellée ou sous pli fermé au premier prix,** où les mises sont privées et effectuées simultanément. Le meilleur enchérisseur gagne.
- **L'enchère scellée ou sous pli fermé au deuxième prix,** où le meilleur enchérisseur paie le montant de la deuxième meilleure mise. Ce type d'enchères est aussi appelé *enchère de Vickrey* ; nous y reviendrons plus tard.
- **L'enchère hollandaise,** *(Dutch auction)*, où le commissaire-priseur annonce un prix élevé. Si personne ne crie pour s'approprier le bien à ce prix, le commissaire-priseur annonce un prix plus bas et ainsi de suite jusqu'à ce qu'un enchérisseur annonce qu'il prend le bien.

Enfin, toutes ces configurations d'enchères renferment deux catégories chacune :
· Les enchérisseurs ont tous la même estimation du prix de l'objet en vente.
· Ils ont chacun leur propre estimation du bien que l'on traitera comme des variables aléatoires.
A noter que les mises peuvent être annoncées sous plusieurs formes ; par exemple "à la criée", sur papier ou de manière électronique. La théorie des jeux ne fait pas la différence entre ces cas, étant donné que la différence peut être psychologique tout au plus, donc non quantifiable.

Le premier à avoir modélisé les enchères est l'américain Lawrence Friedman en 1956 ; il faisait alors la distinction entre la valeur attribuée au bien par un enchérisseur (v) et la valeur jusqu'à laquelle celui-ci désirait miser (b).

$$P = (v - b)p(b)$$

Où $p(b)$ est la probabilité que la mise b aboutisse à l'acquisition de l'objet.

Toutefois, cette théorie ne prenait pas en compte les stratégies adverses comme le fera plus tard la théorie des jeux, alors embryonnaire. Quelques notions de base établies par Friedman resteront identiques jusqu'à nos jours. Le but du commissaire-priseur est de maximiser le prix de vente de l'objet et le but de l'enchérisseur est d'enchérir jusqu'à la valeur à laquelle il évalue l'objet au maximum et de se retirer au cas où un adversaire propose davantage, même lors d'une enchère au deuxième prix. C'est William Vickrey qui prouvera que miser l'équivalent de sa propre estimation de la valeur de l'objet est une stratégie strictement dominante, la stratégie la plus bénéfique quelles que soient celles des adversaires. Plus tard, les mathématiciens iront plus loin et diront que cette procédure consiste à éviter de ressentir ce que l'on appelle la *malédiction du gagnant* (*winner's curse*) qui correspond aux remords d'avoir payé un prix trop élevé, puisqu'au-dessus de ses propres estimations. Pour terminer, des collusions peuvent avoir lieu ; dans ce cas, il s'agira d'atteindre l'Equilibre de Nash le plus instable, celui qui pousse les joueurs à jouer une autre stratégie dans leur propre intérêt mais qui, si tout le monde l'adopte, est le plus bénéfique.

Il est donc facile de recommander une stratégie à adopter pour ces joueurs. Mais, du point de vue de l'organisateur de la vente, quelle est la forme d'enchères à adopter, parmi toutes celles mentionnées ?

Pour répondre à cette question, étudions un cas simple d'enchère en ligne. La modélisation numérique des deux jeux suivants est reproduite à partir du livre "Game Theory, An Introduction"[8]. Ce système recèle un défaut ; il ne fonctionne que sur l'honnêteté du vendeur et de l'acheteur, puisqu'il n'existe pas d'intermédiaire entre les deux : l'acheteur peut recevoir l'objet par la poste et ne pas le payer, puisqu'il l'a déjà et le vendeur peut recevoir l'argent et ne pas envoyer l'objet.

		Vendeur	
		envoyer	garder
Acheteur	payer	(1,1)	(-2,2)
	pas payer	(2,-2)	(-1*,-1*)

L'Equilibre de Nash pur se trouve de manière inattendue dans la case "pas payer/garder" ; par extension, il est préférable de ne pas faire de vente du tout ! Pour résoudre ce problème, introduisons un intermédiaire entre ces deux individus qui garantira le paiement et/ou la livraison de l'objet. On l'appelle le commissaire-priseur(C-P).

		Vendeur (B)		
		envoyer	garder	C-P
Acheteur (A)	payer	(1,1)	(-2,2)	(1,1-c)
	pas payer	(2,-2)	(-1,-1)	(0,-c)
	C-P	(1-c,1)	(-c,0)	(1-c,1-c)

c représente le coût pour employer un commissaire-priseur, que chaque joueur a le choix d'utiliser ou non. Par extension, $0 < c < 1$, ce qui fait que le consensus honnête (payer/envoyer) s'établit logiquement au profit du meilleur gain. Comme le jeu précédent, celui-ci est symétrique. L'Equilibre de Nash peut être calculé en ne se préoccupant que de l'espérance de gains d'un des joueurs, puisqu'elle est identique pour les deux joueurs :

$$\begin{aligned}
P_A(\mathfrak{A},\mathfrak{B}) &= \alpha_1(\beta_1 - 2\beta_2 + 1 - \beta_1 - \beta_2) + \alpha_2(2\beta_1 - \beta_2) \\
&\quad + (1-\alpha_1-\alpha_2)[\beta_1 - c\beta_1 - c\beta_2 + (1-c)(1-\beta_1-\beta_2)] \\
&= \alpha_1(1-3\beta_2) + \alpha_2(2\beta_1 - \beta_2) \\
&\quad + (1-\alpha_1-\alpha_2)(\beta_1 - c\beta_1 - c\beta_2 + 1 - \beta_1 - \beta_2 - c + c\beta_1 + c\beta_2) \\
&= \alpha_1(1-3\beta_2) + \alpha_2(2\beta_1-\beta_2) + (1-\alpha_1-\alpha_2)(1-\beta_2-c) \\
&= \alpha_1 - 3\alpha_1\beta_2 + 2\alpha_2\beta_1 - \alpha_2\beta_2 + 1 - \beta_2 - c - \alpha_1 + \alpha_1\beta_2 \\
&\quad + c\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_2\beta_2 + c\alpha_2 \\
&= -2\alpha_1\beta_2 + 2\alpha_2\beta_1 - \alpha_2 - \beta_2 + c\alpha_1 + c\alpha_2 - c + 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P_A}{\partial \alpha_1} &= -2\beta_2 + c = 0 & &\Rightarrow \beta_2 = \frac{1}{2}c \\
\frac{\partial P_A}{\partial \alpha_2} &= 2\beta_1 - 1 + c = 0 & &\Rightarrow \beta_1 = \frac{1}{2}(1-c)
\end{aligned}$$

Or,

$$1 - \beta_1 - \beta_2 = 1 - \frac{1}{2}c - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \mathfrak{A}_c = \mathfrak{B}_c = \left(\frac{1}{2}(1-c), \frac{1}{2}c, \frac{1}{2}\right)$$

On a alors,

$$\begin{aligned}
P_A(\mathfrak{A},\mathfrak{B}) &= -2\alpha_1\beta_2 + 2\alpha_2\beta_1 - \alpha_2 - \beta_2 + c\alpha_1 + c\alpha_2 - c + 1 \\
&= -2\cdot\frac{1}{2}(1-c)\cdot\frac{1}{2}c + 2\cdot\frac{1}{2}c\cdot\frac{1}{2}(1-c) - \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}c + c\cdot\frac{1}{2}(1-c) + c\cdot\frac{1}{2}c - c + 1 \\
&= \frac{1}{2}c[c + (1-c)] - 2c + 1 = 1 - \frac{3}{2}c
\end{aligned}$$

Tant que $2/3 > c > 0$, les deux joueurs ont une espérance de gain positive. De plus, le commissaire-priseur doit s'assurer que le prix de son service ne sera pas trop élevé, pour que $1-c$ soit le plus grand possible pour les deux joueurs. L'acheteur et le vendeur devraient utiliser le commissaire-priseur une fois sur deux, quand $c = 1$, car on aurait,

$$\Rightarrow \mathfrak{A}_c = \mathfrak{B}_c = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Il est possible de conclure que seule la présence du commissaire-priseur assure la coopération, puisque l'argent investi pour le rémunérer contraint les deux individus à coopérer. C'est pourquoi, d'un point de vue économique, s'est généralisé la pratique des commissaires-priseurs pour garantir la vente de certains objets. D'un point de vue général, l'Equilibre de Nash, ou plus spécifiquement l'Equilibre de Nash Bayésien, a permis à Harsanyi de déterminer que, quel que soit le type d'enchères, l'organisateur vendra son ou ses objets au même prix dans les mécanismes d'enchères où :

$>$ L'enchère est au premier prix.
$>$ L'enchère ne promet aucun gain pour le plus mauvais enchérisseur.
$>$ Les enchérisseurs sont neutres face au risque.

Il s'agit du Théorème de L'équivalence du Revenu.
Pour résumer, l'organisateur de la vente ou le commissaire-priseur a donc intérêt à miser sur un grand nombre d'enchérisseurs et de jouer sur le montant qui lui est attribué par les participants (c) afin d'attirer le plus possible d'enchérisseurs tout en faisant encore du bénéfice.

Il paraît important de noter que certains mathématiciens tentent de considérer les actions en bourse comme des enchères, puisqu'il s'agit de plusieurs acteurs établissant le prix par l'achat. C'est ainsi que l'on peut ajouter le domaine des actions à l'univers de la théorie des jeux

8.4.3 Une anecdote

En 1950, Nash, Lloyd Shapley, Melvin Hausner et Shubik se disent inventeurs du jeu "Ciao gogo". Si un tel jeu se retrouve dans ce chapitre, c'est bien parce qu'il s'agit d'une vente aux enchères... d'un billet d'un dollar. L'enchère est anglaise, avec comme subtilité que le deuxième meilleur enchérisseur doit, lui aussi, payer sa mise sans empocher le dollar. Lorsque ces quatre scientifiques l'expérimentent, le jeu se déroule normalement à coup de mises de quelques centimes additionnels, jusqu'à ce qu'un enchérisseur mise la valeur du dollar. Mais alors le second meilleur enchérisseur devrait payer 99 cents de sa poche sans raison. Il optera donc pour la mise de 1,01 dollar, au risque de ne perdre qu'un cent. Dans ce cas l'autre enchérisseur répondra par une mise plus élevée, et ainsi de suite en escalade. Si l'un des deux abandonne à ce stade, alors l'adversaire se retrouve avec la malédiction du gagnant. Il aura payé plus que la valeur de l'objet pour l'obtenir. Plusieurs cas sont reportés où les joueurs ont largement dépassé la mise d'un dollar [23]. Ce jeu est d'abord une preuve qu'une telle action est possible, rien que dans le but de ne pas gâcher toute la somme misée au tour précédent. Dans le cadre des enchères, cela prouve qu'en prenant compte de l'évaluation du risque de chaque joueur, les enchères à la criée et en direct peuvent aboutir à une excitation, qui mènerait les joueurs à poursuivre dans leur erreur. Ainsi, les types d'enchères où les enchérisseurs sont physiquement présents auraient tout à fait leur raison d'être face aux enchères sur Internet, qui sont en expansion.

Sixième partie
Conclusion

Le premier livre publiquement édité à propos de la théorie des jeux s'intitule « Theory of Games and Economic Behavior » de Von Neumann et Morgensten. Cet ouvrage, comme son nom l'indique, s'orientait vers l'économie. Et pourtant, durant les années qui suivirent, la discipline se tourna plutôt vers les applications militaires sous l'influence du Kriegspiel, de la 2ème Guerre Mondiale et de la Guerre Froide. Ce n'est que vers 1960 que le mathématicien Lloyd Shapley relie à nouveau la théorie des jeux à l'économie, grâce à ses recherches. Entre temps, John Nash a eu le temps de démontrer l'Equilibre de Nash. Plus tard, le professeur Aumann se penche lui aussi sur l'aspect économique de cette théorie mathématique. Il aura d'ailleurs de longues conversations à ce sujet avec M. Nash. Dans le cadre d'une étude sur les missiles, Robert Aumann se souvient de ces débats et de la théorie des jeux et il décide alors de l'appliquer à son travail. Il fait donc des recherches et remarque que la dimension économique du sujet peut encore être développée. Durant cinquante ans (avec d'autres spécialistes, bien sûr), il va développer des théories telles que l'Equilibre Economique ou l'Economie Comportementale (Behavioral Economics) qu'il résume ainsi : les êtres humains ne sont pas toujours rationnels dans leur choix et ils ne jouent donc pas toujours la statégie idéale. Cependant, l'homme a tendance à développer des règles générales de comportement dans sa vie quotidienne qui sont rationnelles [1]. Malgré tous ces progrès économique cités, la plupart des mathématiciens persistent à croire que la théorie des jeux est inutile [12] ; reflexion à laquelle le Professeur Aumann répond par une de ses publications : « What is a Game Theory try to accomplish ? » [5].

http://static.bowenwang.com.cn/gif/game-theory-4.jpg

En réalité, l'économie est directement liée aux mathématiques et ce lien existe au travers de la théorie des jeux. L'origine de cette théorie est à chercher dans les contes et légendes d'autrefois, dans les histoires qui se sont transmises oralement, de générations en générations. C'est donc une des rares disciplines mathématiques qui se construit avec le temps et l'histoire est indispensable à la modélisation : elle permet d'apporter des éléments psychologiques, comportementaux et temporels qui d'habitude sont exclus des théories mathématiques. C'est la raison pour laquelle cette théorie s'adapte avec succès à l'économie, discipline que l'on ne peut appréhender sans l'histoire.

La théorie de l'Equilibre de Nash a réussi à apporter une vision plus naturelle et humaine du jeux. Selon lui, les différents équilibres représentent l'issue de tous les jeux, l'aboutissement attendu en tenant compte du temps et de la répétition. Ces points de convergence sont en fait presque toujours des concessions sur la victoire au bénéfice de la stabilité, de la sécurité.

La théorie des jeux nous apprend comment l'évaluation des risques influence nos différentes stratégies. Nous pouvons, par exemple, laisser notre capital « dormir » dans un compte en banque ou bien décider d'investir dans des placements plus ou moins risqués en fonction de leurs rendements. Ces décisions, de manière intuitives, sont prises en tenant compte de la théorie des jeux.

Ces constats sont-ils vraiment nouveaux et adopte-t-on vraiment un angle de vue différent après s'être penché sur la théorie des jeux ? Que vient nous apprendre de plus l'Equilibre de Nash ? La théorie est là pour nous rappeler que l'Histoire s'est façonnée dans le temps au travers d'une succession de jeux, que nous sommes au final les protagonistes de cette Histoire que nous racontons ; que nous pouvons modéliser ce jeux mais que nous ne devons jamais oublier qu'il existe une quantité presque infinie de données à prendre en compte et que certaines ne sont même pas quantifiables. L'histoire humaine est faite pour être racontée et ce n'est que la connaissance de nos erreurs passées qui permettront que le Jeu soit à chaque tour plus parfait.

La théorie des jeux, John Nash, l'Equilibre de Nash, Robert Aumann, le Duopole de Cournot, la théorie des enchères, LaTeX... Tous ces noms et ces mots ont un point en commun : je n'en connaissais pas l'existence avant de débuter ce travail. Aborder une telle quantité de sujets nouveaux a non seulement mis mon cerveau en éveil mais m'a permis d'entrevoir ce que sera mon avenir universitaire. Lire des ouvrages d'un tel niveau en anglais, maintenir une discipline et de la rigueur, respecter des délais, obtenir et réaliser un entretien avec un Prix Nobel (le Professeur Aumann) sur son lieu de travail ont été des expériences importantes et inoubliables pour moi et m'ont entrouvert les portes de ce que doivent être des études supérieures.
La théorie des jeux fera sûrement partie intégrante de mes futures études.

Références

[1] *Discussion avec le professeur Robert Aumann*, 15 juin 2011.

[2] Anonyme. *NOTIONS DE DÉRIVÉE PARTIELLE ET DE DIFFÉRENTIELLE TOTALE*, date non-mentionnée. http://web2.uqat.ca/lerene/Webcours/gen-0135/manuel/m01-0135.pdf.

[3] Anonyme. *PSTricks*, join 2004. http://mirror.switch.ch/ftp/mirror/tex/graphics/pstricks/contrib/pstricks-add/pstricks-add-doc.pdf.

[4] Anonyme. *Résolution de problème à l'aide d'arbres*, sans date. http://www.mat.ulaval.ca/uploads/media/ArbreResolutionProbleme.pdf.

[5] Robert Aumann. *What is Game Theory trying to accomplish ?*, 1985. http://www.ma.huji.ac.il/raumann/pdf/what\%20is\%20game\%20theory.pdf.

[6] Robert Aumann. *autobiographie sur le site officiel du prix Nobel*, date non-mentionnée. http://nobelprize.org/nobel_prizes/economics/laureates/2005/aumann-or.html.

[7] Robert Aumann. *THE ROLE OF INCENTIVES IN THE WORLD FINANCIAL CRISIS*, février 2010. http://www.ratio.huji.ac.il/dp_files/dp536.pdf.

[8] Emmanual N. Barron. *Game Theory, an Introduction.* John Wiley & Sons, 2008.

[9] Claire Mathieu Brown. *Théorie algorithmique des jeux*, date non-mentionnée. www.cs.brown.edu/~claire/Talks/algorithmicgametheory.ppt.

[10] Brahim Chaib-draa. *Enchères-Négociations*, 16 mars 2008. http://www.damas.ift.ulaval.ca/~coursMAS/Slides-H10/Encheres-Negociation(2PP).pdf.

[11] Simon Loertscher et Tom Wilkening. *Auctions and Economic Design*, 4 avril 2011. http://www.tomwilkening.com/images/Auction_and_Economic_Design.pdf.

[12] Bernard Guerrien. *La théorie des Jeux.* ECONOMICA, quatrième edition, 2010.

[13] Nicolas Géraud. *La Théorie des Jeux. Quelques notions basiques, et son application à la relation client-consultant*, date non-mentionnée. http://www.ad-valor.com/upload/jeux.pdf.

[14] Ron Howard. *A Beautiful Mind*, 2001.

[15] Frederic Koessler. *Théorie des Jeux.* https://sites.google.com/site/frederickoessler/teaching.

[16] Harold W. Kuhn and Sylvia Nasar. *The Essential John Nash.* Princeton University Press, 2002.

[17] Jean-Jacques Laffont. *Comment rationaliser les ventes aux enchères*, date non-mentionnée. mathonautes.free.fr/Divers/ExploMaths/encheres.pdf.

[18] Peter Morris. *Introduction to Game Theory.* Springer-Verlag, 1994.

[19] Peter Morris. *Introducing Game Theory and its Applications.* DISCRETE MATHEMATICS AND ITS APPLICATIONS. CRC Press LLC, 2004.

[20] Sylvia Nasar. *A Beautiful Mind.* Simon & Schuster, 1998.

[21] John Forbes Nash. *autobiographie sur le site officiel du prix Nobel.* http://nobelprize.org/nobel_prizes/economics/laureates/1994/nash.html.

[22] John Forbes Nash. *Essays On Game Theory.* Edward Algar Publishing Limited, 1996.

[23] William Poundstone. *Le dilemme du prisonnier.* Cassini, 2003. (*Prisoners's Dilemma : John von Neumann, Game Theory and the Puzzle of the Bomb* trad. de l'anglais par Oristelle Bonis).

[24] RAND. *Site official de la RAND : Reaearch and Developement.* http://www.rand.org/.

[25] Jacques Robert. *NOMBRES - Curiosités, théorie et usages*, 25 septembre 2009. file://localhost/Users/gabrielbenedict/Documents/TMs/TM/sources/enche\%CC\%80res/histoires\%20des\%20enche\%CC\%80res.html.

[26] Mike Shor. *Normal form Game solver*, 2003. `http://www2.owen.vanderbilt.edu/Mike.Shor/courses/game-theory/applets/NormalForm/NormalForm.html`.

[27] Tom Siegfried. *A Beautiful Math*. Joseph Henry Press, 2006.

[28] Eric van Damme. *Stability and perfection of Nash equilibria*. Springer-Verlag, 1991.

[29] Paul Walker. *A Chronology of Game Theory*, octobre 2005. `http://www.econ.canterbury.ac.nz/personal_pages/paul_walker/gt/hist.htm`.

Remerciements

Je tiens à remercier Luc Dessauges mon professeur de Travail de Maturité, le professeur Olivier Vogel pour son site internet dédié à LaTeX et le Professeur Robert Aumann, Prix Nobel d'Economie en 2005 qui a bien voulu m'accueillir et répondre à quelques questions au Center for Rationality à la Hebrew University of Jerusalem.

<u>Annexe :</u> Équilibre de Nash, traduction et developpement (M. Dessauges)

On considère un jeu à n joueurs, désignés par les nombres 1 à n, dans lequel chaque joueur i possède un nombre fini k_i de *stratégies pures* notées π_{i1}, π_{i2}, ..., π_{ik_i}.

On rappelle qu'une *stratégie pure*, comme définie au paragraphe 7.2, est une liste prédéfinie de choix uniques d'action à jouer pour chaque situation possible du jeu dans laquelle un joueur aurait plusieurs actions possibles à choix. Une fois une stratégie adoptée, un joueur n'a plus à réfléchir mais juste à appliquer à chaque situation le choix prédéfini et jouer cette action. L'hypothèse de finitude sur les *stratégies pures* implique que chaque joueur n'a qu'un nombre fini de choix à faire durant le jeu, en particulier le jeu possède donc un nombre fini de tours, et que chaque choix n'offre qu'un nombre fini de possibilités d'action au joueur.

Une *stratégie mixte* du joueur i est, comme nous l'avons déjà vu au paragraphe 7.2, une combinaison linéaire de ses stratégies pures

$$s_i = \sum_{j=1}^{k_i} c_{ij} \cdot \pi_{ij}$$

où $c_{ij} \in [0; 1]$ désigne la probabilité que le joueur i joue sa stratégie π_{ij}, avec $\sum_{j=1}^{k_i} c_{ij} = 1$ puisque la somme des probabilités de toutes les issues possibles d'une expérience vaut forcément 1.

Définition 1. *Un **scénario** du jeu est un n-uple (ou vecteur) de stratégies mixtes $S = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$, une pour chaque joueur.*

Définition 2. *Pour chaque joueur i, son **gain** est une fonction P_i définie sur les scénarios $P_i(S) = P_i(s_1, \ldots, s_n)$.*

Pour simplifier l'écriture, on introduit encore la notation

$$P_i(S; t_i) = P_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, t_i, s_{i+1}, \ldots, s_n)\,;$$

qui représente le gain du joueur i lorsque les autres joueurs jouent le scénario S mais que lui-même change sa stratégie pour une stratégie t_i.

Définition 3. *Un **équilibre de Nash** du jeu est un scénario $S = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ pour lequel chaque joueur est dans l'impossibilité d'augmenter son propre gain en changeant uniquement sa propre stratégie. C'est-à-dire pour lequel*

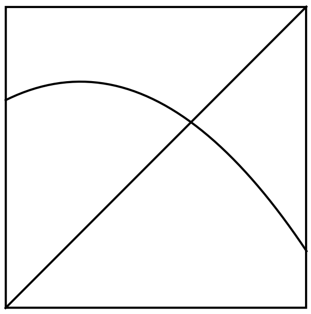
$$P_i(S) = \max\{P_i(S; t_i) \,|\, \textit{pour toute stratégie mixte } t_i \textit{ du joueur } i\ \}\,.$$

Dans une telle situation d'équilibre, aucun joueur n'a intérêt à changer de stratégie puisque, tant que les autres gardent la même stratégie, il est dans l'incapacité d'augmenter ses gains. On peut dire que chaque joueur joue une stratégie optimale, sa meilleure stratégie, face aux stratégies des autres.

Mais, comme nous pourrons le voir dans l'exemple du dilemme du prisonnier au paragraphe 8.3, cela ne signifie pas pour autant que chaque joueur réalise un gain maximal absolu. Il peut exister des situations de non-équilibre qui sont plus profitables pour tous les joueurs que la situation d'équilibre.

Théorème de l'équilibre de Nash. *Pour tout jeu à n joueurs, dans lequel chaque joueur possède un nombre fini de stratégies pures, il existe un équilibre au sens de la définition* **??**.

Voyons comment Nash démontre l'existence générale de son équilibre. Sa démonstration repose sur le théorème du point fixe de Brower. Ce théorème affirme que toute application continue définie sur un espace compact $f : X \to X$ possède un point fixe : $x \in X$ tel que $f(x) = x$. C'est un théorème très général puisque qu'il s'applique à tout espace compact X, notamment aux parties fermées et bornées d'espaces à multiples dimensions – fermée au sens où un intervalle fermé est fermé, parce qu'il contient son bord, contrairement aux intervalles ouverts ou semi-ouverts et bornée au sens où elle ne se prolonge pas indéfiniment, jusqu'à l'infini. Il généralise un théorème plus simple qui affirme que toute fonction $f : [0;1] \to [0;1]$ possède un point fixe $f(x) = x$ et qui se démontre graphiquement en constatant que le graphe $y = f(x)$ d'une telle fonction coupe forcément la diagonale $y = x$; comme dans l'exemple ci-dessous.



Nash définit donc, pour les besoins de sa prenve, une transformation $T(S)$ définie sur l'ensemble de tous les scénarios du jeu. Cet ensemble est un produit de simplexes. En effet, pour chaque joueur i l'ensemble de toutes ses stratégies mixtes

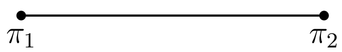
$$\{s_i = \sum_{j=1}^{k_i} c_{ij} \cdot \pi_{ij} \,|\, c_{ij} \in [0;1] \quad \sum_{j=1}^{k_i} c_{ij} = 1\}$$

est un simplexe de dimension $k_i - 1$ ou, autrement dit, l'enveloppe convexe de k_i points linéairement indépendants dans un espace à $k_i - 1$ dimensions. Pour illustrer cette notion de simplexe, nous pouvons citer trois exemples :

1. Le simplexe de dimension 1 est l'ensemble suivant

   $$\{c_1 \cdot \pi_1 + c_2 \cdot \pi_2 \,|\, c_1, c_2 \in [0;1] \quad c_1 + c_2 = 1\} = \{\alpha \cdot \pi_1 + (1-\alpha) \cdot \pi_2 \,|\, \alpha \in [0;1]\}$$

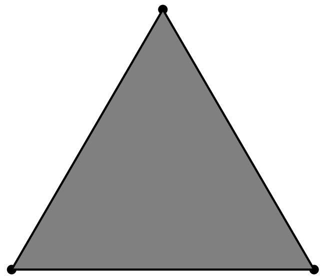
   qui peut être représenté par un segment dont π_1, π_2 sont les sommets :



2. Le simplexe de dimension 2 est l'ensemble suivant

$$\{c_1 \cdot \pi_1 + c_2 \cdot \pi_2 + c_3 \cdot \pi_3 \,|\, c_1, c_2, c_3 \in [0;1] \quad c_1 + c_2 + c_3 = 1\}$$

qui peut être représenté par un triangle plein dont π_1, π_2, π_3 sont les sommets :



3. Le simplexe de dimension 3 est l'ensemble suivant

$$\{c_1 \cdot \pi_1 + c_2 \cdot \pi_2 + c_3 \cdot \pi_3 + c_4 \cdot \pi_4 \,|\, c_1, c_2, c_3, c_4 \in [0;1] \quad c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 1\}$$

qui peut être représenté par un tétraèdre plein dont $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ sont les sommets.

Un simplexe est une partie fermée et bornée d'un espace à multiples dimensions et donc l'ensemble des scénarios et un espaces compact X. Il reste à construire une transformation continue T sur ce compact X qui soit telle que ses éventuels points fixes soient des équilibres au sens de la définition **??**.

Pour ce faire, Nash définit T de telle sorte que si $S' = T(S)$ et $s'_i = \sum_{j=1}^{k_i} c'_{ij} \cdot \pi_{ij}$ alors $c'_{ij} > c_{ij}$ si et seulement si $P_i(S;\pi_{ij}) > P_i(S)$. En clair, T modifie la stratégie s_i de chaque joueur i en augmentant les probabilités c_{ij} de jouer les stratégies pures π_{ij} qui augmenteraient son gain P_i si les autres joueurs ne changeaient rien.

Plus précisément, Nash pose

$$\phi_{ij}(S) = \max\{0; P_i(S;\pi_{ij}) - P_i(S)\} \tag{1}$$

$$s'_i = \frac{s_i + \sum_{j=1}^{k_i} \phi_{ij} \cdot \pi_{ij}}{1 + \sum_{j=1}^{k_i} \phi_{ij}} \tag{2}$$

Concrètement, on a donc

$$c'_{ij} = \frac{c_{ij} + \phi_{ij}}{1 + \sum_{j=1}^{k_i} \phi_{ij}}.$$

Le dénominateur est un facteur de normalisation pour avoir $\sum_{j=1}^{k_i} c'_{ij} = 1$ et ϕ_{ij} est un terme qui augmente la probabilité de jouer la stratégie π_{ij} si et seulement si $P_i(S;\pi_{ij}) > P_i(S)$, comme annoncé.

On peut alors montrer qu'un équilibre est un point fixe de cette transformation vu que, dans un cas d'équilibre, aucune autre stratégie mixte ou pure, donc aucune modification des c_{ij}, ne peut augmenter le gain du joueur i si les autres joueurs ne changent rien. Plus précisément, dans le cas d'un équilibre, $P_i(S;\pi_{ij}) \leq P_i(S)$ pour tout i et j, donc $\phi_{ij} = 0$ pour tout i et j, et par suite $s'_i = s_i$ pour tout i ou $T(S) = S$.

Réciproquement, un point fixe de T est un point pour lequel aucune stratégie pure π_{ij} ne peut augmenter le gain du joueur i si les autres joueurs ne changent rien. En effet, si $s'_i = s_i$ alors $\phi_{ij} = 0$ pour tout j et donc $P_i(S; \pi_{ij}) \leq P_i(S)$ pour tout j. Cela montre que

$$P_i(S) \geq \max\{P_i(S; \pi_{ij}) \,|\, \text{pour toute stratégie pure } \pi_{ij} \text{ du joueur } i\ \}$$

Mais pour montrer que l'on a un équilibre, au sens de la définition **??**, il faut avoir cette dernière relation pour toute stratégie mixte aussi. Il nous reste donc à montrer que, dans toute situation :

$$\max\{P_i(S; t_i) \,|\, \begin{array}{c}\text{pour toute stratégie mixte}\\ t_i \text{ du joueur } i\end{array}\} = \max\{P_i(S; \pi_{ij}) \,|\, \begin{array}{c}\text{pour toute stratégie pure}\\ \pi_{ij} \text{ du joueur } i\end{array}\}$$

C'est-à-dire que le maximum atteint par une stratégie mixte est déjà atteint par une ou plusieurs stratégies pures.

Prenons un exemple avec 2 joueurs et 2 stratégies pures par joueur et examinons le gain du joueur 1 :

$$P_1(s_1, s_2) = P_1(c_{11} \cdot \pi_{11} + c_{12} \cdot \pi_{12}, s_2) = c_{11} \cdot P_1(\pi_{11}, s_2) + c_{12} \cdot P_1(\pi_{12}, s_2)$$

la dernière égalité vient du fait que la fonction gain P_1 est linéaire. En effet, si on joue dans 40% des cas la stratégie π_{11} on gagnera dans 40% des cas le gain de cette stratégie, etc. Supposons alors que $P_1(\pi_{11}, s_2) \geq P_1(\pi_{12}, s_2)$ pour fixer les idées. On a alors

$$\begin{array}{rcl} P_1(s_1, s_2) & = & c_{11} \cdot P_1(\pi_{11}, s_2) + c_{12} \cdot P_1(\pi_{12}, s_2) \\ & \leq & c_{11} \cdot P_1(\pi_{11}, s_2) + c_{12} \cdot P_1(\pi_{11}, s_2) \\ & & = (c_{11} + c_{12}) \cdot P_1(\pi_{11}, s_2) = P_1(\pi_{11}, s_2) \end{array}$$

Ce qui montre que le gain d'une statégie mixte ne peut jamais dépasser le meilleur gain obtenu avec une stratégie pure. Par conséquent, le gain maximal en utilisant des stratégies mixtes est égal au gain maximal des stratégies pures.

Ce dernier argument s'écrit de la même manière pour n joueur ayant des nombres quelconques de stratégies pures et termine l'explication de la preuve du théorème de Nash.

En effet, pour un joueur i arbitraire, supposons, pour fixer les idées, que π_{i1} soit l'une de ses meilleures stratégies pures, c'est-à-dire

$$P_i(S; \pi_{i1}) \geq P_i(S; \pi_{ij}) \text{ pour tout } j.$$

On a alors

$$\begin{array}{rcl} P_i(S) = P_i(S; s_i) & = & P_i(S; \sum_{j=1}^{k_i} c_{ij} \cdot \pi_{ij}) \\ & = & \sum_{j=1}^{k_i} c_{ij} \cdot P_i(S; \pi_{ij}) \\ & \leq & \sum_{j=1}^{k_i} c_{ij} \cdot P_i(S, \pi_{i1}) \\ & & = (\sum_{j=1}^{k_i} c_{ij}) \cdot P_i(S; \pi_{i1}) = P_i(S; \pi_{i1}) \end{array}$$

Ce qui termine la preuve.